УДК 372.8
ББК 74.262.21
П29

Образовательная система «Школа 2000...»

***Научный руководитель* — Л. Г. Петерсон,**
доктор педагогических наук, профессор,
директор Центра системно-деятельностной педагогики
«Школа 2000...» ФГАОУ АПК и ППРО,
академик Международной академии наук педагогического образования,
лауреат Премии Президента РФ в области образования за 2002 год

Петерсон Л. Г., Агаханов Н. Х., Подлипский О. К., Рогатова М. В., Трушин Б. В.
П 29 Методические рекомендации к учебнику «Алгебра» 9 класс / Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханов, О. К. Подлипский, М. В. Рогатова, Б. В. Трушин. — М. : Издательство «Ювента», 2014. — 208 с. : ил.

ISBN 978-5-85429-664-9

В методическом пособии описана система работы по учебнику алгебры для 9 класса авторов Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханова и др.. Приведены программа, тематическое планирование, основные содержательные цели изучения каждого пункта учебника, методические подходы к организации самостоятельной деятельности учащихся, способы достижения личностных, метапредметных и предметных результатов освоения основной образовательной программы ФГОС ООО. В пособии также приведены примеры решения типовых задач и подробно разобрано решение нестандартных заданий, представленных в учебнике.

Курс алгебры для 9 класса авторов Л. Г. Петерсон, Н. Х. Агаханова и др. реализует дидактическую систему деятельностного метода Л. Г. Петерсон («Школа 2000...»). Ориентирован на развитие мышления и творческих способностей учащихся, формирование прочной системы математических знаний, культуры исследовательской и проектной деятельности, умения учиться и готовности к саморазвитию. Соответствующие современным требованиям ГИА, ЕГЭ.

Курс является составной частью непрерывного курса математики «Учусь учиться» для дошкольников, учащихся начальной и средней школы (Премия Президента РФ в области образования за 2002 год). Может использоваться во всех типах школ на основном и предпрофильном (углубленном) уровнях.

УДК 372.8
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-85429-664-9

ВВЕДЕНИЕ

Курс математики (алгебры) для 7–9 классов основной школы «Учусь учиться» является частью непрерывного курса математики образовательной системы «Школа 2000...» и обеспечивает непрерывность математической подготовки учащихся, начиная с дошкольной ступени вплоть до их перехода в старшую школу или получения среднего профессионального образования (на уровне технологии и дидактики, содержания и методики).

Основной целью данного курса является формирование у учащихся умения учиться, их интеллектуальное и духовно-нравственное развитие и воспитание, сохранение и поддержка здоровья детей, овладение каждым учащимся по индивидуальной траектории саморазвития системой глубоких и прочных математических знаний, умений и навыков, необходимых для продолжения образования в любом профиле старшей школы и образовательных учреждениях среднего профессионального образования.

Курс математики «Учусь учиться» для 7–9 классов средней школы обеспечивает организацию учебной деятельности учащихся, в процессе которой создаются условия для надежного достижения целей, поставленных ФГОС ООО – личностных, метапредметных и предметных результатов освоения основной образовательной программы посредством формирования универсальных учебных действий и умения учиться в целом. Данные цели реализуются на основе «Концепции духовно-нравственного развития и воспитания личности гражданина России», составляющей идеологическую основу ФГОС, и системно-деятельностного подхода, составляющего методологическую основу ФГОС.

Исходя из «Концепции духовно-нравственного развития и воспитания личности гражданина России», отбор учебного содержания в курсе математики «Учусь учиться» осуществлялся с ориентацией на формирование базовых национальных ценностей. Средствами учебного предмета математики у учащихся воспитываются ценности созидания и саморазвития, честности и справедливости, открытости и толерантности, уважения к окружающим людям, к отечественной и зарубежной математической культуре. Создаются условия для развития у них познавательного интереса, формирования представлений о математике как о мощном методе познания действительности, едином языке всех наук.

Педагогическим инструментом решения поставленных целей в курсе «Учусь учиться» на всех ступенях обучения с учетом возрастных психологических особенностей развития детей является дидактическая система деятельностного метода обучения Л. Г. Петерсон («Школа 2000...»), реализующая методологическую версию системно-деятельностного подхода (Г. П. Щедровицкий, О. С. Анисимов и др.).

Дидактическая система деятельностного метода обучения (ДСДМ) включает в себя:

- описание образовательных целей и метода их реализации,
- технологию деятельностного метода (ТДМ),
- типологию уроков,
- систему дидактических принципов,
- методическое обеспечение,
- систему диагностики и контроля результатов обучения в соответствии с ФГОС,
- систему подготовки педагогических кадров.

Технология деятельностного метода (ТДМ) – это педагогический инструмент, позволяющий учителю, с одной стороны, организовать включение учащихся в учебную деятельность на основе метода рефлексивной самоорганизации

(Г. П. Щедровицкий, О. С. Анисимов и др.). Благодаря этому создаются условия для надежного достижения каждым учащимися личностных и метапредметных результатов ФГОС. С другой стороны, в ТДМ заложены все этапы глубокого и прочного усвоения знаний (П. Я. Гальперин), что обеспечивает не только высокий уровень предметных результатов ФГОС и сдачу ГИА, но и создает существенный задел для результативного участия школьников в математических олимпиадах, их успешного обучения в 10–11 классах и подготовки к ЕГЭ.[1]

Содержательные особенности построения курса «Учусь учиться» 7–9 классов

Реализация в курсе деятельностного метода обучения позволяет при изучении всех разделов курса **организовать полноценную математическую деятельность учащихся** по получению нового знания, его преобразованию и применению, включающую все три этапа математического моделирования. Ими являются:

1) этап ***математизации действительности***, то есть построения математической модели некоторого фрагмента действительности;

2) этап ***изучения математической модели***, то есть построения математической теории, описывающей свойства построенной модели;

3) этап ***приложения полученных результатов*** к реальному миру.

При построении математических моделей учащиеся приобретают опыт использования математических знаний для описания объектов и процессов окружающего мира, объяснения причин явлений, оценки их количественных и пространственных отношений.

На этапе изучения математической модели они развивают математический язык, логическое, алгоритмическое и творческое мышление, они учатся исследовать и выявлять свойства и отношения, наглядно представлять полученные данные, строить и выполнять алгоритмы.

Далее, на этапе приложения полученных результатов к реальному миру учащиеся применяют математические знания для решения задач. Здесь они отрабатывают умение выполнять алгоритмы решения уравнений и неравенств, а также их систем, при решении текстовых задач. Учащиеся работают со схемами и таблицами, диаграммами и графиками, анализируют и интерпретируют данные, овладевают грамотной математической речью.

Особенностью программы «Учусь учиться» для 7–9 классов является то, что, в отличие от других программ, учащимся сначала предлагается решить практическую задачу, в ходе построения математической модели которой они приходят к необходимости расширения имеющегося у них математического аппарата. Такой прием используется при введении всех основных видов уравнений (линейного диофантова уравнения, линейного уравнения с двумя неизвестными и их систем, квадратного уравнения, дробно-рационального уравнения), а также системы и совокупности неравенств. Это позволяет показать учащимся связь «неживых» букв алгебры с окружающим их «живым» миром и является одним из способов мотивации старшеклассников к изучению математики.

С этой же целью в курсе рассматривается большое число физических задач, решение которых сводится к только что изученным приемам и методам. Благодаря чему у учащихся формируется представление о математике, как о мощном инструменте познания реальных процессов в мире.

Этот же подход используется для формирования понятия «функция» – знакомство с любой новой функцией в 7–8 классах начинается с рассмотрения практических задач, обобщенным описанием которых она является. Начиная с 9

[1] Более подробно о ТДМ, проектировании и проведении уроков см. в приложении.

класса, функции вводятся исходя из внутренней логики развития математической теории.

Еще одной особенностью курса является возможность углубленного изучения темы «Функция». Этому способствует мощная пропедевтика этого понятия, начинающаяся еще в начальной школе. Уже в 6 классе учащиеся получают представление о понятии «функциональная зависимость», что позволяет учащимся в 7 классе работать с понятием «функция» на вполне осознанном уровне. Вплоть до 9 класса к этому понятию учащиеся неоднократно возвращаются и уточняют его. К концу 9 класса у учащихся развивается представление о функции, как об абстрактном правиле сопоставления элементов двух множеств произвольной природы.

Со свойствами функций учащиеся начинают знакомиться, рассматривая их сначала для каждой изучаемой ими функции. В 9 классе эти свойства обобщаются для общего понятия функции и используются при построении графиков. Таким же образом строится работа по изучению преобразований графиков: сначала в 7 классе учащиеся получают представление о получении графика линейной функции из прямой пропорциональности, в 8 классе с помощью параллельного переноса они строят график квадратичной функции, а уже в 9 классе рассматривают этот и другие виды преобразования графиков для общего понятия функции.

Еще одной особенностью содержания программы по изучению функций является работа с ключевой для школьного курса функцией – квадратичной. Эта функция рассматривается в 8 классе в неразрывной взаимосвязи следующих вопросов: квадратное уравнение – квадратичная функция – квадратное неравенство. Это позволяет получить учащимся целостную картину: они понимают, как решение квадратных уравнений помогает для построения графика квадратичной функции, видят, как свойства функции помогают при решении неравенства, чего чаще всего не происходит, если эти вопросы рассматриваются с разрывом во времени. При этом к повторению этих вопросов они возвращаются в 9 классе при решении целых уравнений, неравенств методом интервалов и изучении общих свойств функции.

Методические особенности построения курса «Учусь учиться» для 7–9 классов

Учебники для 7–9 классов адаптированы для реализации ***деятельностного метода*** обучения Л. Г. Петерсон. Их деятельностная направленность помогает учителям реализовывать системно-деятельностный подход к обучению, заявленный в ФГОС ООО.

Ключевой особенностью программы «Учусь учиться» для 7–9 классов является то, что задачный раздел каждого пункта направлен не только на отработку того или иного нового знания (что являлось традиционной задачей учебника), но и на организацию самостоятельной деятельности учащихся по открытию нового понятия или способа действия.

Задачный раздел начинается с системы заданий для организации самостоятельного открытия учащимися новых знаний из программы курса. Вначале учащимся предлагается задание для актуализации изученных способов действий, достаточных для построения нового знания, а также актуализации соответствующих мыслительных операций. Далее предлагается задание, которое выявляет отсутствие у учащихся знания, запланированного к открытию.

Далее предлагается цепочка вопросов либо заданий, которые помогают учащимся открыть новое знание в ходе собственной учебной деятельности (путем наблюдения, эксперимента, аналогии, применения и адаптации уже имеющихся способов к новой ситуации, выдвижения гипотез и их обоснования). После чего происходит сопоставление полученного учащимися результата и текста из теоретической части пункта, выступающего в качестве образца.

Отметим, что учебные тексты теоретической части также выстроены на основе метода рефлексивной самоорганизации. Их структуру можно представить следующим образом:

- постановка новой интересной учащимся задачи, решение которой невозможно известными методами;
- уточнение того, что именно пока недоступно для решения задачи;
- поиск идеи (способа) решения новой конкретной задачи с опорой на имеющиеся к этому моменту у учащихся знания и применение найденного подхода к ее решению;
- обобщение этого подхода в виде метода, позволяющего решать целый класс подобных задач;
- подробный разбор значительного количества примеров применения метода, начиная от простейших и заканчивая содержательными задачами высокого уровня сложности.

Такая структура учебника помогает учащимся самостоятельно работать с теоретическим материалом, что важно для последующего обучения в 10–11 классах и дальнейшего профессионального саморазвития каждого ученика.

Отметим, что задачная часть учебника помимо системы заданий для организации открытия содержит большой набор задач для самостоятельной проработки открытых учащимися знаний (понятий, способов действий). В учебнике представлены задания, разнообразные по уровню сложности, вплоть до задач олимпиадного уровня.

Этот подход соответствует психологическим особенностям подростков. «Чувство взрослости», не подкреплённое ещё реальной ответственностью – это особая форма самосознания, возникающая в переходный период и определяющая основные отношения подростков с миром. Это чувство проявляется в потребности равноправия, уважения и самостоятельности, в требовании серьёзного, доверительного отношения со стороны взрослых. В учебнике предложено место и средство реализации «чувства взрослости» учащихся.

Такая структура учебника, адаптированная к реализации деятельностного метода обучения Л. Г. Петерсон, учитывает и другие особенности подросткового периода – склонность к фантазированию, некритическому планированию своего будущего: результат действия становится второстепенным, на первый план выступает свой собственный авторский замысел. Если учитель оценивает прежде всего качество «продуктов» учебной работы школьников и не находит места для выращивания детского замысла, то тем самым для ученика обесценивается сам процесс учения. Организация обучения, заложенная в задачном разделе учебника для 7–9 классов, дает возможность учащимся экспериментировать со своими возможностями, что является одной из самой яркой характеристикой подростков. Самостоятельные попытки учащихся по открытию математической теории являются формой такого экспериментирования.

Отметим, что при отборе учебного содержания использовался ***дифференцированный подход***. С 7 класса начинается работа по подготовке учащихся к предпрофильному уровню обучения, для этого в учебнике выделяются разделы, необязательные для изучения в общеобразовательном классе. Содержание курса расширяется за счет изучения вопросов математической логики, теории делимости, теории линейных уравнений и неравенств (решение уравнений в целых числах, решение неравенств с модулем), а также вопросов практического применения полученных знаний, в частности, в теме «Функциональная зависимость и кодирование информации» и др.

Программа 8–9 класса строится так, что она может быть использована для изучения школьного курса алгебры на основном и предпрофильном (углубленном) уровнях. Заметим, что предложенное учебное содержание обеспечивает возможность работы по курсу алгебры «Учусь учиться» для 7—9 классов учащихся разного уровня подготовки. Благодаря увлекающей форме подачи материала и нарастающей сложности задач, предлагаемых как для разбора в классе, так и для самостоятельной проработки дома, каждый учитель или сам ученик могут выбрать тот уровень, который необходим и достаточен для достижения поставленных индивидуальных целей. Это может быть как довольно поверхностное понимание изучаемых вопросов математики, которое обеспечит лишь успешную сдачу государственной итоговой аттестации, так и более глубокая проработка, позволяющая заложить прочный фундамент для более глубокого понимания сложных разделов не только основной, но и средней школы. Последнее немаловажно для учащихся, желающих после школы продолжить свое обучение в университетах с повышенным требованием к знанию математики. Для этого дается первичное (хотя и достаточно глубокое) представление о таких понятиях как:

- сложные высказывания и законы логики для них;
- счетные и несчетные множества;
- метод математической индукции;
- системы линейных уравнений высокого порядка и системы линейных неравенств с модулями;
- симметрические системы уравнений;
- теорема Безу и теорема о рациональных нулях многочленов;
- методы приближенного вычисления квадратных корней;
- иррациональные уравнения и неравенства;
- уравнения и неравенства с параметром;
- вычисление погрешностей и приближенное решение уравнений с заданной точностью;
- задачи на максимум и минимум;
- бесконечные числовые последовательности;
- бесконечно убывающие геометрические прогрессии и их суммы;
- линейные рекуррентные соотношения и формулы их общего члена;
- график функции и качественное его построение;
- дробно-линейная функция и ее график;
- степенные функции с рациональным показателем, их свойства и графики;
- тригонометрические функции числового аргумента и их свойства и др.

Такой многоуровневый подход достигается не только отдельными необязательными параграфами «со звездочкой», но и регулярно встречающимися вставками «текста мелким шрифтом» внутри остальных параграфов. Эти вставки помогают развивать у школьников любопытство, прививают любовь к математике. В них содержатся несколько более сложные задачи, доказательства непростых утверждений, и просто занимательные факты, выходящие за формальные рамки стандартов для общеобразовательной школы. Однако освоение таких тем позволит учащимся успешно справляться со сложными заданиями части 2 ОГЭ.

Для еще более пытливых умов в каждом пункте каждого параграфа есть одна-две (а иногда пять-шесть) задач «на смекалку». Эти задачи знакомят школьников с миром «олимпиадных задач». Большинство из этих задач соответствует уровню районного и регионального (а некоторые даже заключительного) этапов Всероссийской олимпиады школьников по математике. Они способны подготовить (при желании учащегося) к успешному выступлению на олимпиадах, или хотя бы заинтересовать и побудить его к размышлению, поиску, развитию.

Важно также отметить, что темы (в том числе и без звездочек), пройденные к окончанию 9 класса, охватывают ряд заданий части В ЕГЭ, а также некоторые виды уравнений и неравенств заданий С1 и С3 ЕГЭ, что создает задел для подготовки к ЕГЭ в 10—11 классах.

Содержательно-методические линии курса «Учусь учиться» для 7–9 классов

Учитывая современный уровень развития математической теории, учебное содержание представлено в виде семи основных содержательно-методических линий, изучение которых подготавливается на дошкольной ступени, и затем непрерывно проходит через все ступени обучения с 1 по 9 класс, вплоть до выпускных классов средней школы: линий *моделирования, логической, числовой, алгебраической, геометрической, функциональной* и *анализа данных.* Целостность курса достигается постоянным сопоставлением и взаимопроникновением результатов, полученных в различных содержательно-методических линиях.

Выбор последовательности учебного содержания по всем содержательно-методическим линиям курса алгебры «Учусь учиться» для 7–9 классов определяется логикой и этапами формирования математического знания в процессе познания в соответствии со вторым этапом процесса теоретического познания – этапа построения математической теории.

В процессе обучения математике с 1 по 6 классы были созданы условия для качественной подготовки учащихся к изучению всех разделов курса алгебры 7–9 классов основной школы. При этом использование деятельностного метода обучения и новых методик позволило существенно расширить спектр изучаемых вопросов. Так, в 5–6 классах были изучены логические понятия, освоены общие методы математической деятельности, которые создали прочную базу для изучения курса математики в 7–9 классах и старшей школе.

Начиная с 7 класса, изучение алгебраической линии становится основной целью курса и эта линия наряду с функциональной линией занимает существенную его часть. Важное место занимает линия анализа данных, ее материал располагается не отдельным блоком, а вводится «порционно» на протяжении всего курса. Остальные линии теперь выполняют поддерживающую их функцию. В рамках изучения школьного предмета «алгебра» геометрическая линия, начиная с 7 класса, содержательно не развивается и имеет фоновый характер для изучения остальных линий курса.

Рассмотрим содержание каждой линии и особенности ее изучения с точки зрения преемственности с предыдущей ступенью обучения.

Числовая линия

В начальной школе числовая линия строилась на основе счета предметов (элементов множества) и измерения величин: учащиеся осваивали смысл понятия натурального числа и нуля, принципы записи и сравнения целых неотрицательных чисел, смысл и свойства арифметических действий, взаимосвязи между ними, приемы устных и письменных вычислений, прикидки, оценки и проверки результатов арифметических действий, зависимости между их компонентами и результатами, способы нахождения неизвестных компонентов. С другой стороны, они знакомились с различными величинами и общим принципом их измерения, учились выполнять действия со значениями величин (именованными числами).

Использование деятельностного метода обучения позволило не только сохранить в полном объеме содержание программы по математике традиционной начальной школы, но и обогатить его с учетом сенситивных периодов развития детей. Так, в 3 классе они изучали нумерацию и действия с целыми неотрицательными числами в пределах 12 разрядов, в 4 классе – дроби, сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями, смешанные числа.

В 5–6 классах учащимися изучены обыкновенные и десятичные дроби (включая и периодические десятичные дроби) и отрицательные числа. Таким образом, к началу 7 класса учащиеся владеют понятием рационального числа и выполняют вычисления с рациональными числами. Учащиеся знакомились с историей развития понятия числа и с методом расширения числовых множеств. Перед ними ставилась проблема недостаточности изученных чисел для измерения величин (например, длины диагонали квадрата со стороной 1), к которой учащиеся вернутся в 8 классе и разрешат путем введения понятия арифметического квадратного корня. На достаточно серьезном уровне с учащимися изучались вопросы, связанные с делимостью чисел: понятие делимости, свойства делимости и признаки делимости на 2, 5, 10, 25 и 4, 125 и 8, на 3 и 9, а также их комбинации, НОД, НОК, простые и составные числа.

В 7 классе учащиеся вновь обращаются к понятию простого и составного числа, знакомятся с *основной теоремой арифметики* (любое составное число можно представить в виде произведения простых множителей, при этом два разложения одного и того же числа на простые множители могут отличаться лишь порядком сомножителей), знакомятся с *каноническим* разложением числа на простые множители, дополняют известные им способы нахождения НОД алгоритмом Евклида. Они уточняют известные им свойства делимости и знакомятся с новыми (на данной ступени обучения эти вопросы уже можно рассматривать как содержание алгебраической линии курса).

В 7 классе в связи с введением аксиоматического метода учащиеся строят теорию делимости на множестве целых чисел. Они получают возможность познакомиться со сравнениями и их свойствами, построить арифметику остатков. Построенная теория делимости важна не только своей эстетикой, возможностью системно повторить известные учащимся свойства делимости, она позволяет применить изученный аксиоматический метод построения математических теорий. Здесь учащиеся осваивают методы решения задач на делимость, которые могут оказаться полезными в разных математических конкурсах и олимпиадах.

В 7 классе учащиеся уточняют понятие рационального числа и учатся переводить периодические дроби в обыкновенные.

В 8 классе они знакомятся с определением арифметического квадратного корня, после знакомства с иррациональными числами у учащихся формируется понятие действительного числа.

В 9 классе понятие корня расширяется: у учащихся формируется понятие кубического корня, они получают представление о корнях высших степеней.

Алгебраическая линия

В рамках изучения алгебраической линии в 5—6 классах учащиеся учились использовать буквенные обозначения для формулировки и доказательства общих утверждений. Это позволяло им проводить доказательство свойств и признаков делимости, свойств пропорций и др. Учащиеся получили представления о числовых и буквенных выражениях, их чтении, записи, целесообразности использования букв. Учащиеся находили значения буквенных выражений при заданных значениях букв, выполняли преобразования при решении уравнений. Таким образом, обеспечена качественная подготовка детей к изучению программного материала по алгебре 7—9 классов.

Рассмотрим, как развивается алгебраическая линия курса в 7—9 классах, условно выделяя следующие ее направления:

- выполнение тождественных преобразований выражений;
- понятие степени числа и применение ее свойств;
- решение уравнений;
- решение неравенств.

В 7 классе повторяются и систематизируются известные учащимися законы арифметических действий, их представления о равносильных выражениях и равносильных ***преобразованиях***. Опираясь на известные им законы арифметических действий, учащиеся самостоятельно строят простейшие правила равносильных преобразований. После того как правила равносильных преобразований сформулированы, учащиеся выполняют преобразования буквенных выражений, которые выполнялись ими и раньше, однако обосновывают они их теперь по-новому. В связи с мощной алгебраической подготовкой, которая осуществлялась в курсе, выполнение подобных заданий у основной части семиклассников не вызовет затруднений. В отличие от предыдущей ступени обучения выполнение равносильных преобразований алгебраических выражений на данном этапе обучения является обязательным навыком.

Далее с учащимися рассматриваются преобразования алгебраических выражений, содержащих произведения и частные. В связи с формулировкой правил равносильных преобразований произведений учащиеся получают возможность научиться преобразовывать алгебраические дроби и выражения, содержащие знак деления.

В 7 классе у учащихся формируются понятия одночлена и многочлена, их стандартного вида, их степени; формируется умение выполнять арифметические действия с одночленами, складывать и вычитать многочлены; умножать одночлен на многочлен и многочлен на многочлен. В 8 классе в рамках углубленного изучения математики учащиеся учатся делить многочлен на многочлен и применяют это умение для выделения целого выражения в дробном (что используется, например, при решении дробно-рациональных уравнений, доказательстве ограниченности последовательностей и пр.)

В 7 классе учащиеся получают представление о формулах сокращенного умножения, как о формулах, позволяющих рационализировать процесс алгебраических преобразований, связанных с умножением. Учащиеся знакомятся со следующими из них: формулами квадрата суммы и квадрата разности; разности квадратов; куба суммы и куба разности; суммы кубов и разности кубов. Учащиеся учатся применять формулы сокращенного умножения для алгебраических преобразований, связанных с умножением, и рационализации вычислений. Более подготовленных учащихся можно познакомить с использованием треугольника Паскаля для возведения двучлена в произвольную натуральную степень.

При углубленном уровне изучения математики в 9 классе учащиеся возвращаются к этому вопросу. Они знакомятся (а в рамках углубленного изучения учатся доказывать) с биномом Ньютона и формулами суммы и разности высоких степеней. Учащиеся обнаруживают связь между треугольником Паскаля (с которым они познакомились в седьмом классе), числами сочетаний (восьмой класс) и коэффициентами в разложении бинома Ньютона.

В 7 классе учащиеся учатся раскладывать многочлены на множители следующими способами: вынесением за скобки общего множителя, способом группировки, с помощью формул сокращенного умножения. Они применяют при разложении многочленов на множители различные вспомогательные приемы, такие как, перестановка слагаемых; представление члена многочлена в виде суммы или разности подобных ему членов; прибавление и вычитание одного и того же слагаемого, выделение полного квадрата. Далее они применяют разложение на множители для алгебраических преобразований, решений уравнений (включая квадратные уравнения) и рационализации вычислений. В рамках опережающего обучения семиклассникам предлагается использовать разложение на множители для сокращения алгебраических дробей.

В 8 классе после введения понятия алгебраической дроби учащиеся выполняют преобразование дробно-рациональных выражений. После того, как учащиеся познакомятся с понятием квадратного арифметического корня и его свойствами, они учатся выполнять преобразования выражений, содержащих квадратные корни. В 9 классе с развитием понятий корня и степени учащиеся получают возможность научиться преобразовывать соответствующие выражения.

К седьмому классу у учащихся сформировано ***понятие степени*** натурального числа с натуральным показателем, они умеют находить в простейших случаях значения степеней с натуральным показателем и выполнять действия в простейших числовых выражениях, содержащих степени.

В пятом классе было введено определение степени с натуральным показателем на множестве натуральных чисел. Однако учащиеся имеют представление и о степени рационального числа, потому что по мере их знакомства с числами в курсе 5–6 классов учащимся предлагались простейшие задания на возведение в степень обыкновенных и десятичных дробей, отрицательных чисел. Эта работа велась с целью формирования первичного опыта у учащихся или как опережающее обучение для более подготовленной части учащихся, поэтому знание понятия степени и умение его применять на множестве рациональных чисел не являлись обязательными результатами обучения для всех учащихся. В седьмом классе задачи формирования у всех учащихся понятия натуральной степени рационального числа, умение применять свойства степеней для преобразования выражений и рационализации вычислений становятся обязательными.

В 7 классе вводится определение степени рационального числа с натуральным показателем, понятие нулевой степени рационального числа. Учащиеся знакомятся со свойствами степеней и используют их для преобразований выражений.

В 9 классе понятие степени расширяется следующим образом. Сначала учащиеся рассматривают степень с отрицательным показателем, в более подготовленных классах доказывается, что известные учащимся свойства степеней выполняются для степеней с отрицательным показателем. Изучение корня n-ой степени дает возможность рассмотреть с учащимися степень с дробным показателем, у них формируется понятие степени с рациональным показателем. Учащиеся учатся преобразовывать алгебраические выражения со степенями с рациональным показателем.

К 7 классу учащиеся владеют следующими знаниями ***об уравнениях***: понятием уравнения, неизвестного в уравнении, корня уравнения, они знают, что значит решить уравнение, им известен способ решения уравнения с помощью равносильных преобразований. Помимо традиционно предлагаемых для решения в 5–6 классах уравнений, учащиеся знакомились с решением простейших уравнений с модулями. В 7 классе учащиеся знакомятся с определением равносильных уравнений, равносильных преобразований уравнений, уточняют правила равносильных преобразований уравнений. Учащиеся знакомятся с понятием линейного уравнения с одним неизвестным, семиклассники выводят алгоритм решения линейного уравнения с одним неизвестным. Учащиеся учатся решать уравнения с модулями следующих видов: $|kx + b| = c$ $(k \neq 0)$, $|ax + b| = |cx + d|$, а также уравнения, содержащие несколько модулей. Более подготовленные учащиеся имеют возможность познакомиться со способом решения линейных диофантовых уравнений с двумя неизвестными.

В 8 классе учащиеся уточняют свои представления о системе уравнений, вводится понятие системы линейных уравнений с двумя неизвестными. Для этого сначала восьмиклассники знакомятся с понятием линейного уравнения с двумя неизвестными, учатся строить его график и находить его решения.

После этого учащиеся знакомятся с понятием системы уравнений и графическим способом ее решения. Более подготовленные учащиеся имеют возможность научиться применять теорему о целочисленных точках графика уравнения для решения систем. Далее учащиеся знакомятся с алгебраическими способами решения систем. При углубленном изучении математики рассматриваются вопросы аналитического способа определения количества решений системы, а также решения систем с большим количеством неизвестных.

В 8 классе учащиеся переходят к рассмотрению других видов рациональных уравнений. Сначала у учащихся формируется понятие квадратного уравнения: они учатся решать квадратные уравнения и уравнения, сводящиеся к квадратным, с помощью замены неизвестного (вводится понятие биквадратного уравнения). После того как учащиеся познакомятся с понятием алгебраической дроби и ее свойствами и научатся выполнять арифметические действия с алгебраическими дробями, они переходят к решению дробно-рациональных уравнений. При решении дробно-рациональных уравнений учащиеся используют несколько способов решения, основанных на преобразовании дробных выражений к целым с учетом ОДЗ и на условии равенства алгебраической дроби нулю, а также на основном свойстве пропорции. Более подготовленные учащиеся имеют возможность познакомиться и с другими способами решения дробно-рациональных уравнений – замены неизвестного и выделении целой части алгебраической дроби, а также их комбинировании.

В 9 классе учащиеся учатся решать новые типы рациональных уравнений высоких степеней (в том числе и возвратные уравнения), сводя их к решению квадратных и линейных уравнений. В рамках углубленного изучения они знакомятся с методом неопределенных коэффициентов. Кроме того, используя следствие из теоремы Безу и изученный в восьмом классе способ деления многочленов в столбик, учатся раскладывать многочлены на множители (а значит, и сводить рациональные уравнения к более простым) при помощи угадывания корней. Они знакомятся (а в рамках углубленного изучения доказывают) теорему о рациональных корнях многочленов с целыми коэффициентами. Учащиеся учатся решать простейшие (а в рамках углубленного изучения и более сложные) иррациональные уравнения. Также происходит первичное знакомство с некоторыми приближенными методами решения уравнений.

В 9 классе имеющиеся навыки решения систем линейных уравнений методами подстановки и алгебраического сложения переносятся на системы нелинейных уравнений. Также рассматриваются некоторые типы систем, которые решаются другими методами: системы с однородными уравнениями и др. В рамках углубленного изучения учащиеся знакомятся с методом упрощения симметрических систем уравнений.

К 7 классу учащиеся уже умеют решать простейшие ***неравенства***, изображая их решение на числовой прямой. В 7 классе уточняются имеющиеся у учащихся знания о неравенствах (что такое неравенство, решение неравенства, что значит решить неравенство), вводится понятие строгого и нестрогого неравенств. Знакомясь с кусочно-линейными функциями, семиклассники рассматривали различные числовые промежутки, их названия, обозначения и геометрическое представление на упрощенной числовой прямой. Поэтому при изучении неравенств они только повторяют такие числовые промежутки, как открытый и замкнутый лучи, а также знакомятся с промежутком вида $(-\infty;+\infty)$.

В 7 классе учащиеся знакомятся с определением равносильных неравенств, равносильных преобразований неравенств, с правилами равносильных преобразований неравенств, после чего знакомятся с понятием линейного неравенства с одним неизвестным и выводят алгоритм решения линейного неравенства с одним неизвестным. Учащиеся имеют возможность научиться решать неравенства с модулями. Однако формирование этого умения не является обязательным для изучения при 3 ч алгебры в неделю.

В 8 классе учащиеся учатся решать системы и совокупности линейных неравенств с одним неизвестным (параллельно тренируясь находить объединение и пересечение числовых промежутков); знакомятся с графическим представлением решения линейных неравенств с двумя неизвестными, а также их систем. В рамках углубленного изучения учатся решать подобные задачи с модулями. Учатся решать квадратные неравенства, знакомятся с методом интервалов для решения рациональных неравенств, учатся доказывать неравенства.

В 9 классе учащиеся учатся решать простейшие (а в рамках углубленного изучения и более сложные) иррациональные неравенства.

Линия моделирования

Большинство изученных алгоритмов решения уравнений и неравенств учащиеся применяют при решении текстовых задач. Особенностью курса является то, что мотивацией к изучению нового типа уравнений (или неравенств) служит необходимость решения практических задач (исключением здесь служит 9 класс). После того, как получен общий способ решения той или иной математической модели, учащиеся возвращаются к решению задачи, вызвавшей необходимость в построении новой математической теории (введения новых понятий и алгоритмов действий). Таким образом, уделяется внимание всем трем этапам математического моделирования (этапу математизации действительности; этапу изучения математической модели и этапу приложения полученных результатов к реальному миру). В результате учащиеся осознают практическую значимость математической науки и ее место в окружающем их мире. В рамках линии моделирования (линии текстовых задач) учащиеся овладевают всеми видами математической деятельности, осознают практическое значение математических знаний, у них формируются универсальные учебные действия, развивается мышление, воображение, речь.

Для решения задач в 7–9 классах учащиеся используют наработанный ими за 1–6 класс инструментарий (схемы и таблицы и пр.), применяют алгоритм решения задач методом математического моделирования и уточняют его. Они узнают, что в качестве математической модели может быть получено не только уравнение, но и неравенство, а также несколько соотношений, описывающих взаимосвязи между величинами, указанные в условии задачи (или заданные в условии задачи неявно).

В 9 классе учащиеся знакомятся с абсолютной и относительной погрешностью, а также учатся ее применять для решения реальных задач, входные данные которых не могут быть вычислены точно.

Функциональная линия

Рассмотрим, как развивается функциональная линия курса в 7–9 классах, условно выделяя следующие ее направления:

- Понятие функции;
- Изучаемые виды функций;
- Изучаемые свойства функций;
- Числовые последовательности, как функции натурального аргумента;
- Тригонометрические функции.

К 7 классу в результате функциональной пропедевтики учащиеся знают понятие переменной, умеют работать с координатной плоскостью, имеют опыт построения графиков по формулам и таблицам. Им известно, что с помощью переменных можно представлять зависимости между величинами, фиксировать их с помощью формул, таблиц и графиков. Имеют представление об обратной и прямой пропорциональности, их графиках. Кроме того, в шестом классе учащиеся получили первичное представление об обобщенной функциональной зависимости между величинами как о зависимости определенного вида. Поэтому в 7 классе при введении одного из центральных математических понятий – ***понятия функции***, учащимся остается лишь еще раз уточнить его практическую значимость (прогнозирование реальных событий, кодирование) и познакомиться с его новым названием. Вплоть до 9 класса учащиеся неоднократно возвращаются к понятию функции и уточняют его. В итоге у учащихся формируется понятие функции, как правила сопоставления элементов двух множеств произвольной природы.

В соответствии с общим методологическим подходом, принятым в данном курсе, знакомство с любой новой функции в 7–8 классах начинается с рассмотрения практических задач, обобщенным описанием которых она является. Таким образом изучаются следующие ***виды функций***: в 7 классе – прямая пропорциональность, линейная и кусочно-линейная функция, в 8 классе – нелинейные функции $y=\frac{k}{x}$, $y=\sqrt{x}$, степенные функции с натуральным показателем $y = x^2$, $y = x^3$, кусочно-заданная функция, а также квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$.

Начиная с 9 класса, функции вводятся в курсе исходя из внутренней логики развития математической теории. В рамках углубленного изучения рассматриваются: степенная функция с рациональным показателем и дробно-линейная функция, числовые последовательности рассматриваются как функции, заданные на множестве натуральных чисел, вводятся тригонометрические функции числового аргумента.

Отметим, что изучение кусочно-линейной функции в 7 классе было подготовлено работой с графиками движения с переменной скоростью (учащиеся анализировали и строили графики движения, начиная с 4 класса). Это понятие расширяется в 8 классе до кусочно-заданной функции и используется при построении графиков функций с модулем, вплоть до изучения общего способа построения графиков вида $y=|f(x)|$ $y=f(|x|)$.

Каждая из изучаемых функций исследуется, строится ее график, выявляются ее ***свойства***, такие как монотонность, четность и нечетность и др. В 9 классе знания о свойствах функции систематизируются – рассматриваются общие свойства функции. В рамках углубленного изучения функций учащиеся знакомятся с такими свойствами, как периодичность и ограниченность. Дается общий план построения графика функции.

В 9 классе рассматриваются вопросы преобразования графиков функций, что позволяет на основе изученных ранее простых функций строить графики более сложных, используя параллельный перенос, симметрию, сжатие (растяжение).

В 9 классе вводится понятие ***числовой последовательности*** как функции, заданной на множестве натуральных чисел. Рассматриваются способы задания последовательностей. В рамках углубленного изучения рассматриваются такие свойства последовательностей как монотонность и ограниченность.

Изучаются важные виды последовательностей – арифметические и геометрические прогрессии. Выводятся формулы общего члена, суммы первых членов прогрессии.

В рамках углубленного изучения рассматриваются сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии, линейные рекуррентные соотношения (и как их частные случаи арифметико-геометрическая прогрессия, последовательность Фибоначчи).

В 9 классе учащиеся получают возможность познакомиться с элементами тригонометрии. После введения понятия ***тригонометрических функций*** числового аргумента, изучаются их основные свойства и выводятся основные формулы тригонометрии, что готовит учащихся к изучению тригонометрии в старших классах.

Логическая содержательно-методическая линия

Достаточно серьезное внимание уделяется в курсе развитию логической линии. В 5–6 классах логическая линия разворачивается в цепочку взаимосвязанных вопросов: математический язык – высказывания – доказательство – методы доказательства – определения – равносильные предложения – отрицание – логическое следование – теорема и т.д. В 7 классе к изучению некоторых из этих вопросов учащиеся возвращаются. Так учащиеся уточняют структуру определения, знакомятся с доказательством методом от противного, получают возможность изучить понятие логического вывода на основе диаграмм Эйлера – Венна и причины и виды логических ошибок.

В 8 классе уточняются понятия «необходимость», «достаточность», «свойство», «признак», «критерий». Учащиеся получают представление о понятиях конъюнкция и дизъюнкция. Изучаются сложные высказывания. Выводятся формулы де Моргана.

Содержательно-методическая линия анализа данных

Линия анализа данных, начиная с начальной школы, целенаправленно формирует у учащихся информационную грамотность; умение самостоятельно получать информацию – из наблюдений, справочников, энциклопедий, Интернет-источников, бесед; работать с полученной информацией: анализировать, систематизировать и представлять в форме схем, таблиц, конспектов, диаграмм и графиков; делать выводы; выявлять закономерности и существенные признаки; проводить классификацию; осуществлять систематический перебор вариантов.

В 7 классе учащиеся возвращаются к вопросу о способах упорядочивания информации, систематизируют накопленные знания и используют при выполнении различных заданий практической направленности. Рекомендуется продолжать эту работу не только на уроках, но и во внеурочной проектной деятельности, кружковой работе, при создании собственных информационных объектов – презентаций, сборников задач и примеров, стенгазет и информационных листков и т.д. В ходе этой деятельности учащиеся получают возможность развивать навыки работы с компьютером, необходимые для обучения в школе и современной жизни.

В 7–9 классах классе учащиеся знакомятся также с *элементами комбинаторики*, *статистики*, *теории вероятностей*.

В начальной школе, а затем в 5–7 классах у учащихся формируется опыт систематического перебора вариантов с помощью выбора логики перебора, таблиц, дерева возможностей. Они использовали его для обоснования суждений методом перебора и для решения задач на смекалку. В 8 классе учащиеся систематизируют этот опыт и выводят новые для них правила комбинаторики: правило произведения, понятие перестановки и формулу подсчета числа перестановок. Как обычно, целесообразность построения нового математического инструмента раскрывается посредством рефлексивного анализа практической задачи, в ходе решения которой выявляется недостаточность имеющихся инструментов перебора.

Аналогично, в 9 классе исследуются перестановки с повторениями, выводятся формулы для числа размещений и сочетаний, что позволяет решать комбинаторные задачи достаточно высокого уровня сложности.

С проблемой статистических характеристик процессов учащиеся сталкиваются в 7 классе и знакомятся со следующими статистическими показателями: *среднее значение*, *мода*, *медиана* и *размах* набора данных. В 8 классе эти характеристики дополняются статистическими показателями *дисперсия* и *частота,* причем показатель *частота* используется как мостик, связывающий изучение статистики и теории вероятностей.

Здесь же, в 8 классе учащиеся знакомятся с классическим определением вероятности, а после этого рассматривают статистическую вероятность и взаимосвязь этих понятий.

В 9 классе вводится современное определение вероятности, которое формулируется на языке теории множеств. Затем учащиеся получают представление о геометрической вероятности, решают более сложные вероятностные задачи с применением комбинаторных рассуждений.

Тематическое планирование по курсу «Учусь учиться»

Тематическое планирование по изучению курса 9 класса разработано в двух вариантах на 102 ч и на 170 ч.

Тематическое планирование к учебнику 9 класса *3 ч в неделю, всего 102 ч* (общеобразовательная программа)		
№ пункта учебника	**Название пункта**	**Кол – во часов**
Глава 1. Развитие математической теории (21 час)		
§ 1. Теория множеств.		**8**
1.1.1.	Основные понятия теории множеств. Числовые множества.	2
1.1.2.	Операции над множествами.	2
1.1.4.	Применение понятий теории множеств.	2
Контрольная работа № 1 (на повторение)		2
§ 2. Элементы комбинаторики и теории вероятностей.		**13**
1.2.1.	Перестановки с повторениями.	2
1.2.2.	Размещения.	2
1.2.3.	Сочетания.	3
1.2.4.	Применение комбинаторики при решении вероятностных задач. Геометрическая вероятность.	4
Контрольная работа № 2		2
Глава 2. Развитие понятия функции (14 часов)		
§ 1. Свойства функции.		**8**
2.1.1.	Множество точек на плоскости. Графики уравнений и неравенств.	2
2.1.2.	Общее понятие функции. Область определения и множество значений функции.	2
2.1.3.	Основные свойства функции.	4
§ 2. Исследование функций и построение графиков.		**6**
2.2.2.	Преобразования графиков функций.	2
2.2.4.	Преобразование графиков: симметрия относительно осей координат. График $y = \|f(x)\|$ и $y = f(\|x\|)$.	2
Контрольная работа № 3		2
Глава 3. Числовые последовательности (14 часов)		
§ 1. Последовательности и их общие свойства.		**2**
3.1.1.	Последовательности. Способы задания последовательностей.	2
§ 2. Арифметическая прогрессия.		**5**
3.2.1.	Арифметическая прогрессия. Формула общего члена.	3
3.2.2.	Сумма первых n членов арифметической прогрессии.	2
§ 3. Геометрическая прогрессия.		**7**
3.3.1.	Геометрическая прогрессия. Формула общего члена.	3
3.3.2.	Сумма первых n членов геометрической прогрессии.	2
Контрольная работа № 4		2
Глава 4. Решение уравнений и неравенств высших степеней (40 часов)		
§ 1. Развитие понятия корня.		**7**
4.1.1.	Корни высших степеней.	3
4.1.2.	Преобразование выражений, содержащих корни n-й степени.	2
4.1.4.	Функция $y = \sqrt[n]{x}$ и ее график.	2

§ 2. Решение простейших иррациональных уравнений и неравенств.		**5**
4.2.1.	Иррациональные уравнения.	3
Контрольная работа № 5		2
§ 3. Расширение понятия степени.		**7**
4.3.1.	Степень с целым показателем.	2
4.3.2.	Степень с рациональным показателем.	2
4.3.4.	Уравнения, содержащие неизвестное в рациональной степени.	3
§ 4. Решение уравнений и неравенств высших степеней.		**10**
4.4.1.	Решение уравнений высших степеней.	5
4.4.2.	Неравенства высших степеней: методы решения.	3
Контрольная работа № 6		2
§ 5. Системы нелинейных уравнений.		**7**
4.5.1	Решение систем способом подстановки и сложения.	4
4.5.2.	Другие способы решения систем нелинейных уравнений с двумя неизвестными.	3
§ 6. Приближенное решение уравнений.		**4**
4.6.1.	Приближенные вычисления. Абсолютная и относительная погрешность.	2
Контрольная работа № 7		2
Итоговое повторение курса алгебры		**13**
Тематическое планирование к учебнику 9 класса *5 ч в неделю, всего 170 ч* (программа углубленного изучения математики)		
№ пункта учебника	**Название пункта**	**Кол – во часов**
Глава 1. Развитие математической теории (28 часов)		
§ 1. Теория множеств.		**10**
1.1.1.	Основные понятия теории множеств. Числовые множества.	2
1.1.2.	Операции над множествами.	3
1.1.3.*	Счетные и несчетные множества.	1
1.1.4.	Применение понятий теории множеств.	2
Контрольная работа № 1 (на повторение)		2
§ 2. Элементы комбинаторики и теории вероятностей.		**11**
1.2.1.	Перестановки с повторениями.	2
1.2.2.	Размещения.	2
1.2.3.	Сочетания.	4
1.2.4.	Применение комбинаторики при решении вероятностных задач. Геометрическая вероятность.	3
§ 3*. Метод математической индукции.		**7**
1.3.1.*	Принцип математической индукции.	2
1.3.2.*	Применение метода математической индукции в разных задачах.	3
Контрольная работа № 2		2
Глава 2. Развитие понятия функции (21 час)		
§ 1. Свойства функции.		**9**
2.1.1.	Множество точек на плоскости. Графики уравнений и неравенств.	2

2.1.2.	Общее понятие функции. Область определения и множество значений функции.	1
2.1.3.	Основные свойства функции.	3
2.1.4.*	Еще о свойствах функции.	3
§ 2. Исследование функций и построение графиков.		**12**
2.2.1.*	Общий план построения графика функции.	2
2.2.2.	Преобразования графиков функций.	2
2.2.3.*	График дробно-линейной функции.	2
2.2.4.	Преобразование графиков: симметрия относительно осей координат. График $y = \|f(x)\|$ и $y = f(\|x\|)$.	4
Контрольная работа № 3		2
Глава 3. Числовые последовательности (23 часа)		
§ 1. Последовательности и их общие свойства.		4
3.1.1.	Последовательности. Способы задания последовательностей.	2
3.1.2.*	Свойства последовательностей: монотонность, ограниченность.	2
§ 2. Арифметическая прогрессия.		**8**
3.2.1.	Арифметическая прогрессия. Формула общего члена.	4
3.2.2.	Сумма первых n членов арифметической прогрессии.	2
Контрольная работа № 4		2
§ 3. Геометрическая прогрессия.		**11**
3.3.1.	Геометрическая прогрессия. Формула общего члена.	4
3.3.2.	Сумма первых n членов геометрической прогрессии.	2
3.3.3.*	Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.	2
3.3.4.*	Линейные рекуррентные соотношения.	1
Контрольная работа № 5		2
Глава 4. Решение уравнений и неравенств высших степеней (60 часов)		
§ 1. Развитие понятия корня.		**14**
4.1.1.	Корни высших степеней.	2
4.1.2.	Преобразование выражений, содержащих корни n-й степени.	3
4.1.3.*	Более сложные преобразования выражений, содержащих корни.	3
4.1.4.	Функция $y = \sqrt[n]{x}$ и ее график.	2
4.1.5.*	Иррациональность чисел $\sqrt[n]{a}$.	2
Контрольная работа № 6		2
§ 2. Решение простейших иррациональных уравнений и неравенств.		**8**
4.2.1.	Иррациональные уравнения.	3
4.2.2.*	Иррациональные неравенства.	3
Контрольная работа № 7		2
§ 3. Расширение понятия степени.		**9**
4.3.1.	Степень с целым показателем.	2
4.3.2.	Степень с рациональным показателем.	2
4.3.3.*	Степенная функция $y = kx^n$.	1
4.3.4.	Уравнения, содержащие неизвестное в рациональной степени.	2
Контрольная работа № 8		2

§ 4. Решение уравнений и неравенств высших степеней.		**14**
4.4.1.	Решение уравнений высших степеней.	3
4.4.2.	Неравенства высших степеней: методы решения.	2
4.4.3.*	Деление многочленов и теорема Безу. Схема Горнера.	2
4.4.4.*	Еще один способ решения уравнений высших степеней.	2
4.4.5.*	Бином Ньютона. Общие формулы сокращенного умножения.	3
Контрольная работа № 9		2
§ 5. Системы нелинейных уравнений.		**8**
4.5.1.	Решение систем способом подстановки и сложения.	3
4.5.2.	Другие способы решения систем нелинейных уравнений с двумя неизвестными.	3
4.5.3.*	Симметрические системы уравнений.	2
§ 6. Приближенное решение уравнений.		**7**
4.6.1.	Приближенные вычисления. Абсолютная и относительная погрешность.	2
4.6.2.*	Погрешность суммы, разности, произведения и частного.	2
4.6.3.*	Приближенное решение уравнений.	1
Контрольная работа № 10		2
Глава 5.* Тригонометрические функции числового аргумента (24 часа)		
§ 1. Тригонометрические функции. Основные свойства и графики.		**10**
5.1.1.	Измерения углов и дуг в радианах.	2
5.1.2.	Тригонометрические функции числового аргумента.	2
5.1.3.	Свойства тригонометрических функций.	3
5.1.4.	Выражение одних тригонометрических функций через другие.	3
§ 2. Основные формулы тригонометрии. Тригонометрические преобразования.		**14**
5.2.1.	Тригонометрические функции от суммы и разности двух чисел.	2
5.2.2.	Формулы приведения	2
5.2.3.	Тригонометрические функции двойного, тройного и половинного аргумента.	3
5.2.4.	Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму и суммы в произведение.	3
5.2.5.	Комбинированные преобразования выражений, содержащих тригонометрические функции.	2
Контрольная работа № 11		2
Итоговое повторение курса алгебры		**14**

Общие рекомендации для учителя

Учителю средней школы, который начинает работать по учебникам 7–9 классов, важно знать программу 5–6 классов по данному курсу. Поэтому необходимо познакомиться с учебниками для 5–6 классов и системой эталонов (способов действий), которые учащиеся изучили в начальной школе.

Кроме того, с учителем, работавшим в 5–6 классах, необходимо обговорить, на каком уровне реализовывалась ТДМ (базовый, технологический, системно-технологический), каким образом шла в классе работа над буквенными выражениями, формулами, задачами, уравнениями и неравенствами, на каком уровне изучались темы, которые имеют пропедевтический характер и не входят в систему административного контроля.

Система обучающего контроля

На уроках открытия нового знания, при проведении обучающих самостоятельных работ и выполнении заданий творческого уровня оценивается только успех, ошибки выявляются и корректируются на основе определения их причин (то есть правил, алгоритмов, определений, которые усвоены недостаточно). На уроках рефлексии используется самоконтроль, отметки в журнал выставляются по желанию. Отметки за контрольную работу выставляются всем учащимся, при этом уровень трудности подбирается так, чтобы отметки 4 и 5 по силам было получить примерно 75% учащихся класса.

Начиная с 8 класса, учащиеся начинают готовиться к тестовой форме контроля, для чего в учебнике предлагаются экспресс-тесты. По результатам выполнения теста учащиеся могут проверить и оценить свои успехи, для чего в конце каждого теста приводится образец для самопроверки и шкала успешности. Организация такого рода контроля способствует не только формированию предметных результатов, но и метапредметных (владение основами самоконтроля, самооценки в учебной деятельности), и личностных (ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию, осознанному выбору и построению дальнейшей индивидуальной траектории образования) результатов ФГОС.

Отметим, что в курсе не ставится цель, чтобы каждым учеником были выполнены все задания из учебника. Обязательным минимумом результатов обучения по программе является уровень, определенный в образовательных стандартах, а уровень, который желательно достичь основной части учащихся общеобразовательной школы, определяется заданиями раздела «Задачи для самоконтроля». Если учебник 8–9 класса используется для предпрофильного уровня обучения, содержание контрольных работ соответствует программе углубленного изучения математики, определенной стандартом.

Домашнее задание

Домашние задания состоят из двух частей:

- ***обязательная часть*** включает в себя 2–3 посильных для каждого учащегося задания примерно на 30 мин самостоятельной работы учащихся;
- ***необязательная часть*** – по 1–2 дополнительных задания.

В качестве обязательной части домашнего задания учителем выбираются задания из раздела, отмеченного буквой «Д». С учетом возрастных особенностей учащихся рекомендуется привлекать к отбору домашнего задания самих учащихся. В качестве необязательной части домашнего задания можно использовать задания из раздела «С».

Самопроверка учащимися обязательной части домашних заданий, коррекция ошибок и выставление в тетради отметок может осуществляться в начале урока самими учащимися по готовому образцу, представленному учителем с помощью презентаций, кодоскопа, переносных досок и т.д. Тогда при проверке тетрадей учитель оценивает лишь правильность самопроверки.

Дополнительную часть домашнего задания рекомендуется проверять индивидуально. Правильное решение задач на смекалку учащиеся по заданию учителя оформляют на листках, после чего они вывешиваются в классе с указанием фамилий тех, кто верно решил предложенные задачи. При оценке этих заданий выставляются только положительные отметки.

Экспресс-тесты, которые представлены по окончанию каждого параграфа, также можно использовать в качестве домашней работы (часть С служит необязательной частью домашнего задания).

Методические рекомендации к учебнику 9 класса

Глава 1. Развитие математической теории

Знакомясь с основными понятиями теории множеств, учащиеся овладевают элементами универсального математического языка, они используют их при решении различных задач как вспомогательные. Традиционно эти понятия изучаются в школьном курсе математики неявно при рассмотрении других вопросов курса. Особенностью курса «Учусь учиться» является то, что основные понятия теории множеств становятся объектом специального изучения, что дает учащимся возможность осознанно применять эти понятия при изучении других тем курса. Еще в начальной школе учащиеся получают представления о множестве, элементе множества, подмножестве, объединении и пересечении множеств, знакомятся с диаграммами Эйлера – Венна, а затем регулярно их используют. В девятом классе они возвращаются к изучению теории множеств, систематизируют имеющиеся у них знания и обогащаются новыми, основное внимание сосредотачивается на изучении бесконечных множеств, рассматривается вопрос их эквивалентности. Рассматривается связь понятий теории множеств с теорией функций и теорией вероятностей, в результате чего учащиеся повторяют и уточняют определения функции и вероятности. При углубленном изучении курса рассматривается вопрос счетных и несчетных множеств.

Второй параграф посвящен изучению элементов комбинаторики и теории вероятностей. Уже известное понятие перестановки уточняется рассмотрением случая перестановки с повторением, это дает возможность изучить новый материал с одновременным повторением уже изученного. Далее учащиеся знакомятся с понятиями размещения и сочетания и соответствующими формулами. Следует понимать, что основной задачей изучения этого раздела является не заучивание учащимися новых понятий и формул, а развитие их мышления. Так решение комбинаторных задач формирует способность представлять явления в разных комбинациях, проводить целенаправленный перебор возможностей и др. Именно поэтому при знакомстве с каждым новым видом комбинаторных задач сначала формулируется правило подсчета искомых комбинаций и лишь затем вводится соответствующий комбинаторный термин и формула. Важно не увлекаться освоением новой терминологии, а уделять внимание пониманию учащимися способа получения рассматриваемых в задачах комбинаций. Особенно в общеобразовательных классах рекомендуется, например, использовать вместо фразы: «подсчет числа размещений», говорить «подсчет вариантов выбора в определенном порядке k элементов из n», после чего более подготовленных учащихся можно просить перевести ее на язык комбинаторики.

Отметим, что основная сложность при решении задачи на подсчет вариантов, связана с выбором нужной формулы. Поэтому в курсе вводится алгоритм, который помогает учащимся разобраться, о каких комбинациях идет речь в задаче: о перестановках, размещениях или сочетаниях. В дальнейшем они используют его и при решении задач по теории вероятности. При решении вероятностных задач учащиеся применяют не только комбинаторные рассуждения, но и рассуждения геометрического характера, знакомясь с понятием геометрической вероятности. При углубленном изучении курса учащиеся получают представление о биномиальных коэффициентах и их свойствах, что дает возможность в дальнейшем при изучении формул сокращенного умножения высших степеней разобрать вопрос о биноме Ньютона.

В общеобразовательном классе рекомендуется ограничиться обзорным знакомством с материалом данных параграфов. Следует понимать, что главной целью уроков в начале учебного года является повторение ранее изученного. В первом и втором параграфе главы 9 класса новый материал изучается с использованием содержания различных тем курса алгебры 8 класса, что позволяет организовать их повторение в традиционной для курса «Учусь учиться» форме: параллельно с изучением тем «Теории множеств» и «Элементы комбинаторики и теории вероятностей».

При углубленном изучении курса учащиеся знакомятся с методом математической индукции, который будет применять в дальнейшем при изучении некоторых вопросов курса.

Характеристика деятельности учащихся

При изучении содержания первой главы учащиеся:

- *повторяют* и *систематизируют* полученные ранее знания;
- *применяют* изученные способы действий для решения задач в типовых и поисковых ситуациях;
- *обосновывают* правильность выполненного действия с помощью обращения к общему алгоритму, определению, свойству;
- *используют диаграммы Эйлера – Венна для* выполнения различных задач;
- *применяют понятия теории множеств* для решения различных задач (решения систем и совокупностей уравнений и неравенств и др.);
- *анализируют* задачи на подсчет числа вариантов с целью упрощения их решения;
- *применяют известную формулу* числа перестановок для выведения формулы числа перестановок с повторениями;
- *применяют известное правило* произведения для выведения формулы числа размещений;
- *применяют известную формулу* числа размещений для выведения формулы числа сочетаний;
- *применяют формулы* для решения комбинаторных задач;
- *строят математическую модель* текстовых задач, переводя их условие на язык теории вероятностей;
- *применяют графические представления и формулы комбинаторики* при решении вероятностных задач;
- *применяют метод математической индукции* для выполнения различных заданий;
- *применяют полученные знания* для решения задач практической направленности.

Особенности изучения учебного содержания

При изучении первой главы планированием предусмотрены уроки ОНЗ, структура которых обеспечивает выполнение учащимися целого комплекса универсальных учебных действий. Рассмотрим способ организации урока ОНЗ на примере содержания пункта 1.1.1 «Основные понятия теории множеств. Числовые множества».

В этом пункте учащиеся уточняют понятие множества, его элементов, подмножества, пустого множества и знакомятся с понятием равных множеств. Здесь же учащиеся уточняют свои представления о важнейшем понятии теории множеств – соответствии между множествами, знакомятся с определением взаимно однозначного соответствия между множествами и определением эквивалентных множеств.

Урок открытия новых знаний выстраивается в соответствии с требованиями технологии деятельностного метода Л.Г. Петерсон (см. раздел Приложение). На этапе *мотивации* учитель может рассказать учащимся о понятии множества, как одном из наиболее общих математических понятий, позволяющих выявить общие свойства объектов из самых разных областей знаний. Далее учитель может предложить учащимся вспомнить, где они использовали данное понятие, после чего сделать вывод о важности уточнения имеющихся у учеников представлений об этом понятии. Рекомендуется попросить учащихся озвучить свои предположения о теме сегодняшнего урока.

После чего учитель организует актуализацию известных понятий: множество и его элемент и предлагает выполнить задание №1. Для самостоятельного открытия понятия равных множеств можно использовать №3 – № 4.

Рассмотрим пример *структуры открытия нового знания*.

1. Новое знание: понятие равных множеств.

2. Актуализация.

Повторить: понятие множества и его элементов.

3. Задание на пробное действие.

Как можно назвать множества A и B из задания №3?

4. Фиксация затруднения.

Я не могу сказать, как называются множества A и B из задания №3.

Я не могу обосновать, что мой ответ верный.

5. Фиксация причины затруднения.

Я не знаю, как называются такие множества.

6. Цель учебной деятельности.

Выявить, как называются множества A и B из задания №3 и все подобные им множества.

7. Фиксация нового знания.

Учащиеся должны построить определение равных множеств.

Открыть новое знание учащиеся могут на основании наблюдений, проведенных при сопоставлении элементов равных множеств с использованием текста задания №4. Далее учитель знакомит учащихся с остальными новыми для девятиклассников понятиями: вводится определение взаимно однозначного соответствия между множествами и определение эквивалентных множеств.

На *этапе первичного закрепления* рекомендуется выполнить задание №6, 7(а, в), в подготовленном классе можно выполнить № 5; для *самостоятельной работы* учащимся можно предложить №7 (б).

На *этапе включения в систему знаний* учитель предлагает учащимся № 8, в более подготовленном классе можно выполнить № 9.

Для *повторения* рекомендуется выполнить № 10 – №14. На этапе *рефлексии* можно обратиться к эпиграфу и предложить учащимся прокомментировать его с точки зрения содержания сегодняшнего урока. После чего учащимся предлагается оценить процесс и результат своей работы на уроке.

Кроме урока открытия нового знания, основные структурные элементы которого рассмотрены выше, планированием предусмотрены и другие типы уроков: *уроки рефлексии тренировочного и коррекционного типа*, где учащиеся вырабатывают и закрепляют свое умение применять новые понятия и способы действий, учатся самостоятельно выявлять и исправлять свои ошибки, корректировать свою учебную деятельность.

В первой главе учащимся предлагаются экспресс-тесты, которые можно использовать для урока рефлексии или в качестве домашней работы.

Планированием также предусмотрены и уроки *обучающего контроля*. Перед проведением контрольной работы рекомендуется провести урок рефлексии с использованием содержания соответствующего раздела «Задачи для самоконтроля».

§1. Теория множеств

П. 1.1.1. Основные понятия теории множеств. Числовые множества

Основные содержательные цели.

1) Уточнить понятие множества, его элементов, подмножества, пустого множества.

2) Сформировать понятия равных множеств, соответствия между множествами, взаимно однозначного соответствия между множествами и эквивалентных множеств.

3) Повторить способы решения линейных уравнений, систем линейных уравнений с двумя неизвестными, квадратных уравнений. Закрепить умение выполнять перевод десятичной дроби в обыкновенную и обратно.

Для **самостоятельного открытия** понятия равных множеств рекомендуется выполнить №1 – №4.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№5.

а) Чтобы показать, что дробь $\frac{2}{5}$ помимо своего естественного представления, в виде конечной десятичной дроби $\frac{2}{5}=0,4$ имеет еще одно представление в виде периодической дроби с девяткой в периоде: $\frac{2}{5}=0,3999...=0,3(9)$, необходимо перевести данную периодическую дробь в обыкновенную.

$0,3(9) = x$

$3,9(9) = 10x$

$9x = 3,6$

$x=\frac{2}{5}$.

б) Запишем обыкновенные дроби $\frac{1}{2}$; $\frac{3}{4}$; $\frac{4}{25}$ в виде десятичной дроби двумя способами.

$\frac{1}{2}=0,5=0,4(9)$; $\frac{3}{4}=0,75=0,74(9)$; $\frac{4}{25}=0,16=0,15(9)$.

Можно проверить эти равенства путем перевода периодической дроби в обыкновенную, распределив их между группами учащихся.

в) Конечную десятичную дробь (с ненулевой дробной частью) можно представить в виде периодической дроби: для этого цифру последнего разряда уменьшают на единицу, и приписывают справа бесконечное число девяток.

Для целых чисел этот способ может быть сформулирован следующим образом: целое число уменьшают на единицу и приписывают после запятой бесконечное число девяток.

2) Множества $A = \{3,(7); 2,1(34); 0,2(348); 0,7(9)\}$ и $B=\left\{\frac{34}{9};\frac{786}{1665};\frac{2113}{990};\frac{4}{5}\right\}$ не являются равными. Переведя обыкновенные дроби из множества *B* в десятичные, мы не получим такие же элементы, как в множестве *A*, так как $\frac{34}{9}=3,(7)$, $\frac{2113}{990}=2,1(34)$, $\frac{4}{5}=0,7(9)$, но $\frac{786}{1665}\neq 0,2(348)$.

№6.

$3 \in N$;

$\frac{72}{3}=24 \in N$;

$-6 \notin \boldsymbol{N}, -6 \in \boldsymbol{Z}$;

$\frac{1}{8} \notin \boldsymbol{N}$, $\frac{1}{8} \notin \boldsymbol{Z}$, $\frac{1}{8} \in \boldsymbol{Q}$;

$-2,(02) = \frac{-200}{99} \in \boldsymbol{Q}$, так как если $x = -2,(02)$, $100x = -202,(02)$, вычтем из второго равенства первое: $100x - x = -202,(02) + 2,(02) \Leftrightarrow 99x = -200 \Leftrightarrow x = \frac{-200}{99}$;

$\sqrt{144} = 12 \in \boldsymbol{N}$; $\sqrt{15}$ — иррациональное число, $\sqrt{15} \in \boldsymbol{R}$.

$\frac{(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)}{5} = \frac{6}{5} \in \boldsymbol{Q}$;

0, 24681012 ... (после запятой выписаны подряд все натуральные четные числа) — не является периодической десятичной дробью.

В классах с углубленным изучением математики рекомендуется провести доказательство этого факта.

Покажем, что дробь не является периодической. Действительно, пусть период дроби состоит из n цифр, и дробь становится периодической после выписанного числа $2m$. Но среди четных чисел больших $2m$ есть число вида 10^k, где $k \geqslant n$. То есть в числе 0,24681012... в периоде встретятся по крайней мере n нулей подряд. Но это будет означать, что весь период состоит только из нулей, однако после числа 10^k идет число 10^k+2, содержащее вместо последнего нуля цифру 2. Получили противоречие. Значит, дробь не является периодической.

То есть это число не является рациональным, и 0, 24681012 ... $\in \boldsymbol{R}$.

Ответ: а) $\left\{3; \frac{72}{3}; \sqrt{144}\right\}$; б) $\left\{-6; 3; \frac{72}{3}; \sqrt{144}\right\}$;

в) $\left\{-6; -2,(02); \frac{(\sqrt{7}+1)(\sqrt{7}-1)}{5}; 3; \frac{72}{3}; \sqrt{144}\right\}$.

№7.

а) два множества не являются эквивалентными, так как у них разное количество элементов;

б) два множества являются эквивалентными, так как каждому элементу из множества A можно поставить в соответствие элемент множества B (это пары противоположных рациональных чисел) и наоборот;

в) два множества являются эквивалентными: любое натуральное число, кратное пяти можно записать с помощью выражения $5n$, где $n \in \boldsymbol{N}$, то есть $1 \to 5$, $2 \to 10$, $3 \to 15$, ..., $n \to 5n$. Причем каждое из чисел, кратное пяти, получается по этому правилу ровно один раз. При этом обратное тоже будет верно. Значит, построено взаимно однозначное соответствие между множествами, то есть они эквивалентны.

Ответ: а) нет; б) да; в) да.

№8.

Первый способ: пересчитать количество гостей и стульев. В случае их равенства устанавливается, что каждому из гостей хватит стула. Второй способ не предусматривает подсчета: составляются пары (каждый встает возле своего стула). Именно второй способ использует определение эквивалентности двух множеств.

Из **раздела для повторения** рекомендуется выполнить все задания, однако учитель может лишь те, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений.

Рассмотрим решение **нестандартных задач** данного пункта.

№21.*

По прошествии 6 часов минутная стрелка находится в исходном положении, а часовая поворачивается на 180°.

Ответ: 6 часов.

№22.*

Пусть натуральные числа $k \geqslant m \geqslant n$ – длины сторон треугольника с периметром 1997. Тогда натуральные числа $k+1$, $m+1$, $n+1$ будут длинами сторон треугольника периметра 2000. Такой треугольник существует, так как из неравенства $m + n > k$ следует неравенство $(m+1) + (n+1) > k+1$. Значит, каждому треугольнику периметра 1997 соответствует треугольник периметра 2000.

Поэтому утверждение задачи будет доказано, если мы докажем, что и каждому треугольнику периметра 2000 соответствует треугольник периметра 1997. Пусть натуральные числа $K \geqslant M \geqslant N$ – длины сторон треугольника периметра 2000. Тогда, во-первых, все его стороны больше 1. Действительно, каждая сторона треугольника больше разности двух других сторон, поэтому если какая-то сторона имеет длину 1, то две другие должны быть равны между собой, и в этом случае периметр треугольника – нечетное число. Во-вторых, $M + N > K$ откуда $(M - 1) + (N - 1) \geqslant (K - 1)$. Но в случае равенства мы получаем, что сумма $M + N + K = 2K + 1$ (нечетна), но она равна 2000. Значит, сумма двух меньших чисел среди чисел $M - 1$, $N - 1$, $K - 1$ больше третьего, и эти числа являются длинами сторон некоторого треугольника.

Ответ: таких треугольников равные количества.

П. 1.1.2. Операции над множествами

Основные содержательные цели.

1) Уточнить понятия пересечения и объединения множеств, сформировать понятие дополнения и разности множеств.

2) Уточнить представления учащихся о применении этих понятий при выполнении различных заданий.

3) Повторить способ решения системы и совокупности неравенств и уравнений, уточнить способ нахождения области определения алгебраической дроби.

4) Закрепить умение выполнять преобразования дробно-рациональных выражений, использовать теорему Виета и обратную ей теорему, решать задачи с помощью дробно-рационального уравнения.

Для **самостоятельного открытия** понятия дополнения множества рекомендуется выполнить №29. Для **самостоятельного открытия** понятия разности множеств рекомендуется выполнить №30– №31.

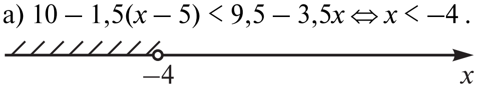
Отметим, что учитель *выбирает только одно знание* для организации самостоятельного его открытия учащимися, остальные знания вводятся учителем, например, путем подводящего диалога.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

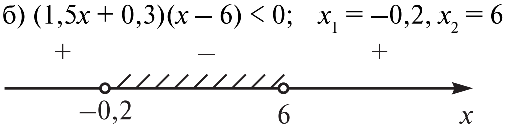
№25.

При определении множества значений x, учащиеся повторяют алгоритмы решений целых и дробно-рациональных неравенств.

а) $10 - 1{,}5(x - 5) < 9{,}5 - 3{,}5x \Leftrightarrow x < -4$.

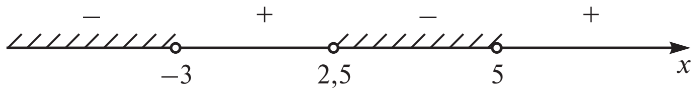


б) $(1{,}5x + 0{,}3)(x - 6) < 0$; $x_1 = -0{,}2$, $x_2 = 6$.



в) $\dfrac{(x+3)(5-x)}{2x-5}>0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}(x+3)(x-5)(2x-5)<0\\ x\neq 2{,}5\end{cases}.$

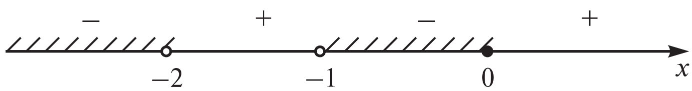
$x_1 = -3$, $x_2 = 2{,}5$, $x_3 = 5$.



г) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+3x+2}\geqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{-6x}{(x+1)(x+2)}\geqslant 0 \quad\Leftrightarrow\quad \dfrac{6x}{(x+1)(x+2)}\leqslant 0 \quad\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}6x(x+1)(x+2)\leqslant 0\\ x\neq -1\\ x\neq -2\end{cases}.$

$x_1 = -2$, $x_2 = -1$, $x_3 = 0$.



№26.

а) $(x-2)(2x+7)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x=2\\ x=-3{,}5\end{array}\right.$. б) $(2x-2)(x+7)(3x-1{,}2)=0 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-7\\ x=0{,}4\end{array}\right.$.

Ответ: {–3,5; 2}. *Ответ:* {–7; 0,4; 1}.

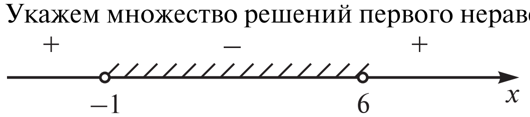
№27.

а) $|x^2 - 5x| < 6$

Модуль числа меньше 6, если это число принадлежит интервалу от – 6 до 6.

$\left|x^2-5x\right|<6 \quad\Leftrightarrow\quad -6<x^2-5x<6 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}x^2-5x<6\\ x^2-5x>-6\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}(x-6)(x+1)<0\\ (x-2)(x-3)>0\end{cases}.$

Укажем множество решений первого неравенства:



Укажем множество решений второго неравенства:

Найдем пересечение множеств решений двух неравенств: (–1; 2) ∪ (3; 6).

Ответ: (–1; 2) ∪ (3; 6).

б) $|2x^2 - 9x + 15| \geqslant 20$

Модуль числа больше или равен 20, если это число больше или равно 20, либо меньше или равно –20.

$|2x^2 - 9x + 15| \geqslant 20 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x^2-9x+15\geqslant 20\\ 2x^2-9x+15\leqslant -20\end{array}\right.$

Однако $2x^2 - 9x + 15 > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$, так как $a = 2 > 0$ и $D = -39 < 0$.

Поэтому решаем одно неравенство:

$2x^2 - 9x + 15 \geqslant 20$

$2x^2 - 9x - 5 \geqslant 0$

$D = (-9)^2 - 4\cdot 2\cdot(-5) = 121 > 0$, два корня.

$$x_1 = \frac{-(-9)+11}{2\cdot 2} = 5, \; x_2 = \frac{-(-9)-11}{2\cdot 2} = -\frac{1}{2}$$

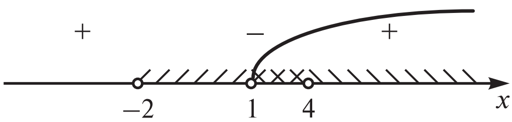
$$2x^2 - 9x - 5 = 2(x-5)\left(x+\frac{1}{2}\right) = (x-5)(2x+1)$$

Решением неравенства является объединение двух множеств решений: $(-\infty; -0{,}5] \cup [5; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; -0{,}5] \cup [5; +\infty)$.

№28.

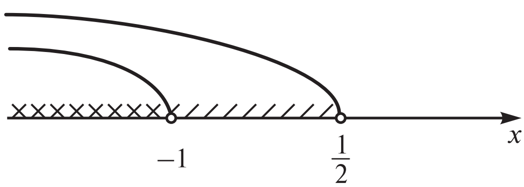
а) $\begin{cases} x-1>0 \\ -x^2+2x+8>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>1 \\ (x-4)(x+2)<0 \end{cases}$.



Множество значений x, удовлетворяющих данному условию есть пересечение множеств решений двух неравенств: $(-2; 4) \cap (1; +\infty) = (1; 4)$.

Ответ: $(1; 4)$.

б) $\left[\begin{array}{l} \dfrac{3-2x}{5} < \dfrac{1-x}{2} \\ 2-3x>x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x<\dfrac{1}{2} \end{array}\right.$



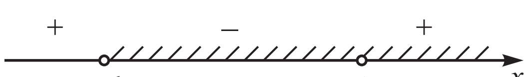
Множество значений x, удовлетворяющих данному условию есть объединение множеств решений двух неравенств: $(-\infty;-1) \cup \left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right) = \left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

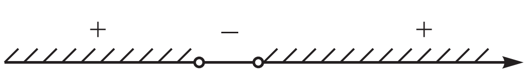
Ответ: $\left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

г) $\begin{cases} \left|x^2+5x\right|<6 \\ \left|x+1\right| \leqslant 1 \end{cases}$.

Решим каждое неравенство из данной системы.

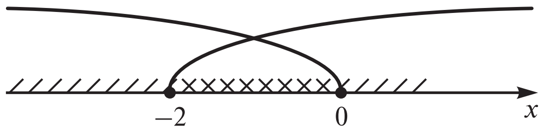
1) $\left|x^2+5x\right|<6 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x<6 \\ x^2+5x>-6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+5x-6<0 \\ x^2+5x+6>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+6)(x-1)<0 \\ (x+2)(x+3)>0 \end{cases}$





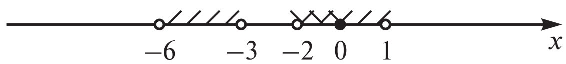
Найдем пересечение решений двух неравенств: $x \in (-6;-3) \cup (-2;1)$.

2) $|x+1| \leqslant 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \leqslant 1 \\ x+1 \geqslant -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leqslant 0 \\ x \geqslant -2 \end{cases}$



$x \in [-2; 0]$

3) И, наконец, найдем пересечение множеств решений двух неравенств исходной системы.



$((-6;-3) \cup (-2;1)) \cap [-2; 0] = (-2; 0]$.

Ответ: $(-2; 0]$.

№33.

а) $\dfrac{x}{3x-9}$.

$3x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 3$

ОДЗ: $x \neq 3$, то есть $x \in (-\infty;3) \cup (3; +\infty)$.

Можно записать этот ответ, используя понятие разности множеств: $x \in \boldsymbol{R}\backslash\{3\}$.

б) $\dfrac{n}{n^2-4}$.

$n^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow (n - 2)(n + 2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n=2 \\ n=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow n \in \{-2; 2\}$.

ОДЗ: $n \neq -2$, $n \neq 2$.

Либо можно записать так: $\boldsymbol{R}\backslash\{-2; 2\} = (-\infty;-2) \cup (-2; 2) \cup (2; +\infty)$.

в) $\dfrac{2}{x^2+13x+30}$.

$x^2+13x+30=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=-10 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-10;-3\}$.

ОДЗ: $x \neq -10$, $x \neq -3$.

Либо можно записать так: $\boldsymbol{R}\backslash\{-10; -3\} = (-\infty;-10) \cup (-10; -3) \cup (-3; +\infty)$.

г) $\dfrac{6a}{a^2+(a+1)^2-(a+2)^2}$.

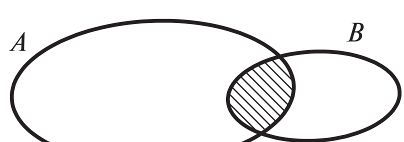
$a^2+(a+1)^2-(a+2)^2=0 \quad \Leftrightarrow \quad a^2-2a-3=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a=3 \\ a=-1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad a \in \{-1;3\}$

ОДЗ: $a \neq -1$, $x \neq 3$.

Либо можно записать так: $\boldsymbol{R}\backslash\{-1; 3\} = (-\infty;-1) \cup (-1; 3) \cup (3; +\infty)$.

№38.

Пусть A – множество учащихся в классе, увлекающихся математикой, а B – множество учащихся в классе, увлекающихся биологией. Тогда C – это множество тех учащихся, которые увлекаются и математикой, и биологией, то есть $C = A \cap B$.



$C = A \cap B$

$15 - 10 = 5$ столько учащихся увлекаются только математикой ($A\backslash C$)

$20 - 10 = 10$ столько учащихся увлекаются только биологией ($B\backslash C$)

$5 + 10 + 10 = 25$ столько учащихся в классе $((A\backslash C) \cup (A \cap B) \cup (B\backslash C))$

Ответ: 25 человек.

№39.

1 и 2 пеналы – зеленый карандаш;

1 и 3 пеналы – лиловая ручка;

2 и 3 пеналы – желтый ластик.

В 1 без пары в другом пенале остался красный ластик, во 2 – синяя ручка, в 3 – оранжевый карандаш.

Ответ: чтобы сохранилась закономерность, в четвертом пенале должны лежать красный ластик, синяя ручка, оранжевый карандаш.

Из **раздела для повторения** рекомендуется выполнить все задания, однако учитель может выбрать лишь те, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№54.*

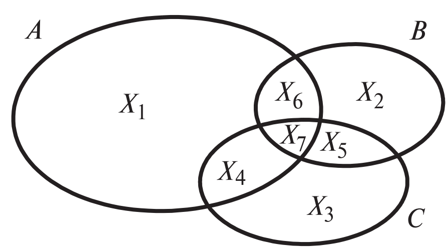
а) Приведем примеры симметрической разности двух множеств.

1) Пусть $\boldsymbol{A}$ – множество натуральных чисел, делящихся на 3, $\boldsymbol{B}$ – множество четных натуральных чисел. Тогда $\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B}$ – множество натуральных чисел, дающих при делении на 6 остаток 3; $\boldsymbol{B}\backslash\boldsymbol{A}$ – множество натуральных чисел, дающих при делении на 6 остатки 2 или 4; $\boldsymbol{B\ \Delta\ A=A\ \Delta\ B}$ – множество натуральных чисел, дающих при делении на 6 остатки 2,3,4.

2) Пусть $\boldsymbol{A}$ – множество учеников 9А класса, $\boldsymbol{B}$ – множество мальчиков, учащихся в 9А и 9Б классах. Тогда $\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B}$ – множество девочек, учащихся в 9А классе, $\boldsymbol{B}\backslash\boldsymbol{A}$ – множество мальчиков, учащихся в 9Б классе, $\boldsymbol{A\ \Delta\ B}$ – объединение множеств $\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B}\backslash\boldsymbol{A}$, то есть множество девочек, учащихся в 9А классе и множество мальчиков, учащихся в 9Б классе.

3) Пусть $\boldsymbol{A}$ – множество прямоугольников на плоскости. $\boldsymbol{B}$ – множество ромбов на плоскости. Тогда $\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B}$ – множество прямоугольников, не являющихся квадратами, $\boldsymbol{B}\backslash\boldsymbol{A}$ – множество ромбов, не являющихся квадратами, $\boldsymbol{A\ \Delta\ B}$ – объединение множеств $\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B}\backslash\boldsymbol{A}$, то есть множество прямоугольников, не являющихся квадратами и множество ромбов, не являющихся квадратами.

б) Обозначим части множеств $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ как показано на рисунке.



Тогда $(\boldsymbol{A\ \Delta\ C}) = \boldsymbol{X_1} \cup \boldsymbol{X_3} \cup \boldsymbol{X_5} \cup \boldsymbol{X_6}$,

$(\boldsymbol{B\ \Delta\ C}) = \boldsymbol{X_2} \cup \boldsymbol{X_3} \cup \boldsymbol{X_4} \cup \boldsymbol{X_6}$.

Отсюда $(\boldsymbol{A\ \Delta\ C}) \cap (\boldsymbol{B\ \Delta\ C}) = \boldsymbol{X_3} \cup \boldsymbol{X_6}$.

Теперь $(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{X_6} \cup \boldsymbol{X_7}$. Отсюда

$(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})\ \boldsymbol{\Delta}\ \boldsymbol{C} = \boldsymbol{X_3} \cup \boldsymbol{X_4} \cup \boldsymbol{X_5} \cup \boldsymbol{X_6}$.

Поэтому $(\boldsymbol{A\ \Delta\ C}) \cap (\boldsymbol{B\ \Delta\ C}) =$

$= \boldsymbol{X_3} \cup \boldsymbol{X_6} \subset \boldsymbol{X_3} \cup \boldsymbol{X_4} \cup \boldsymbol{X_5} \cup \boldsymbol{X_6} = (\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B})\ \boldsymbol{\Delta}\ \boldsymbol{C}$.

№55.*

Пусть Аня придумала k таких же слов, как Боря, и еще l таких же слов, как Вася. Кроме того, Боря придумал m слов, которых больше ни у кого не было, и Вася придумал n слов, которых больше ни у кого не было. При этом у Ани $k + l$ слов и $k + l$ очков, у Бори $k + m$ слов и $k + 2m$ очков, у Васи $l + n$ слов и $l + 2n$ очков.

Требуемая в условии задачи ситуация записывается системой неравенств

$l + n < k + m < k + l < k + 2m < l + 2n$.

Числа $k = 7$, $l = 4$, $m = 3$ и $n = 5$ — это одно из ее решений.

Ответ: могло.

П. 1.1.3*. Счетные и несчетные множества

Основные содержательные цели.

1) Сформировать понятие счетного и несчетного множеств.

2) Сформировать представление о счетности множества рациональных чисел и несчетности множества действительных чисел.

3) Закрепить умение решать рациональные уравнения. Повторить понятие дизъюнкции и конъюнкции высказываний.

Для повторения понятий бесконечного и конечного множеств, понятия эквивалентности множеств рекомендуется выполнить №56–№57. Для **самостоятельного открытия** свойства объединения двух множеств, эквивалентных N рекомендуется выполнить №58.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№57.

Первый способ: пересчитать количество мужчин и количеству женщин. В случае их равенства устанавливается, что каждому из гостей найдется пара для танцев. Второй способ не предусматривает подсчета: составляются пары (каждый встает возле своего партнера по танцам). Именно второй способ использует определение эквивалентности двух множеств.

№58.

1) а) Можно.

1) б) Переселим всех постояльцев гостиницы следующим образом. Если человек занимал комнату с номером n, то переселим его в комнату с номером $2n$. Таким образом, все комнаты с нечетными номерами станут свободными.

Покажем, что в эти комнаты можно поселить столько же постояльцев. Для этого дублируем каждого постояльца. Тогда в номерах с номерами 2, 4, 6, ..., $2k$, ... живут по два человека. Теперь по одному человеку-дублю из каждой комнаты с номером $2n$ можно переселить в комнату $2n-1$. То есть можно считать, что всех «дублей» мы заново заселили в гостиницу. А их столько же, сколько и было постояльцев.

2) Учащиеся могут доказать это свойство по аналогии с рассуждениями, проведенными в пункте 1(б) задания. После этого их можно познакомить с другим способом ее доказательства, представленным в учебнике (см. теорему 3.2).

№59.

а) Покажем сначала, что множество целых чисел счетно. Для этого установим взаимно однозначное соответствие между целыми числами и натуральными. Сделаем это следующим образом:

Целое число	Натуральное число
0	1
1	2
–1	3
2	4
–2	5
...	...
n	$2n$
$-n$	$2n+1$
...	...

Таким образом, каждому целому числу мы поставили в соответствие натуральное, причем все натуральные числа использованы.

Теперь завершить доказательство можно, заметив, что множество целых чисел, дающих при делении на 4 остаток 1, является бесконечным подмножеством счетного множества. Значит, по теореме 2 оно счетно.

б) Занумеруем рациональные числа $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$, и составим бесконечную таблицу, в которую запишем все точки плоскости с двумя рациональными координатами и занумеруем их натуральными числами следующим образом (это очень похоже на то, как мы нумеровали рациональные числа):

вторая координата / первая координата	a_1	a_2	a_3	a_4	...
a_1	1	2	9	10	...
a_2	4	3	8	11	...
a_3	5	6	7	12	...
a_4	16	15	14	13	...
...	...	...	...	...	...

№60.

а, б) Мы доказали (пример 1), что множество точек любого интервала несчетно.

Также заметим, что если множество содержит в себе несчетное подмножество, то оно само несчетно. Действительно, это множество бесконечно и если бы оно было бы счетным, то любое его подмножество было бы счетным или конечным.

И луч $(a; +\infty)$, и множество $[a; b] \cup [c; d]$ содержат в себе интервал, то есть несчетное подмножество. Поэтому и сами эти множества несчетны.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№72. *

Хотя каждый раз дед Мороз дарит в 2 раза больше конфет, чем отбирает, в момент встречи Нового года все конфеты снова окажутся у деда Мороза. Действительно, каждая конкретная конфета будет один раз подарена, а при следующей раздаче отобрана. После этого она до Нового года останется у деда Мороза.

Ответ: все конфеты будут у деда Мороза.

П. 1.1.4. Применение понятий теории множеств

Основные содержательные цели.

1) Сформировать представление о взаимосвязи различных разделов математики друг с другом на примере применения понятий теории множеств в других теориях.

2) Уточнить определение функции и определение вероятности случайного события с точки зрения теории множеств.

3) Закрепить умение решать рациональные уравнения и умение анализировать график.

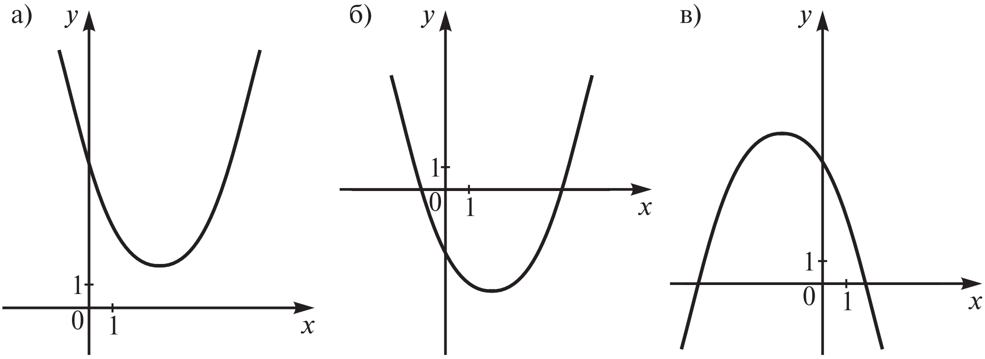
Выполнение заданий №73 – №75 направлено на актуализацию понятия функция. Для **самостоятельного выявления** взаимосвязи понятий взаимно однозначное соответствие и функция рекомендуется выполнить №76 – №78. Для **самостоятельного уточнения понятия** функции используется №79, после того как учащимися будут озвучены свои примеры нечисловых функций рекомендуется познакомить их с примерами, разобранными в учебнике. Для **самостоятельной**

формулировки учащимися нового определения вероятности случайного события рекомендуется выполнить №80.

Еще раз подчеркнем, что учитель *выбирает только одно знание* для организации самостоятельного его открытия учащимися, остальные знания вводятся учителем, например, путем подводящего диалога.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта:

№74.



а) $\underline{a > 0}$, так как ветви параболы направлены вверх;
$\underline{c > 0}$, так как $y(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c > 0$.

б) $\underline{a > 0}$, так как ветви параболы направлены вверх;
$\underline{c < 0}$, так как $y(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c < 0$.

в) $\underline{a < 0}$, так как ветви параболы направлены вниз;
$\underline{c > 0}$, так как $y(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c > 0$.

№75.

а) $y = \dfrac{x+4}{x^2+4x}$.

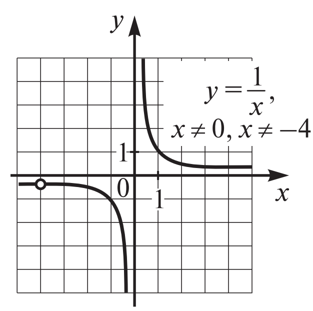
1. Поскольку формула, которой задается функция, содержит алгебраическую дробь, найдем те значения x, при которых знаменатель дробного выражения равен нулю, а затем исключим их из множества действительных чисел.

$$x^2+4x=0 \iff x(x+4)=0 \iff \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-4 \end{array}\right. .$$

$D(f) = (-\infty; -4) \cup (-4; 0) \cup (0; +\infty)$.

2. Чтобы построить график функции, преобразуем алгебраическую дробь:

$$\frac{x+4}{x^2+4x} = \frac{x+4}{x(x+4)} = \frac{1}{x}.$$



Построим график функции $y = \dfrac{1}{x}$ с учетом области определения данной функции.

Графиком является гипербола $y = \dfrac{1}{x}$ с «выколотой» точкой $\left(-4; -\dfrac{1}{4}\right)$.

в) $y = \dfrac{x^4 - 13x^2 + 36}{(x+2)(x-3)}$.

1. Поскольку формула, которой задается функция, содержит алгебраическую дробь, найдем те значения x, при которых знаменатель дробного выражения равен нулю, а затем исключим их из множества действительных чисел.

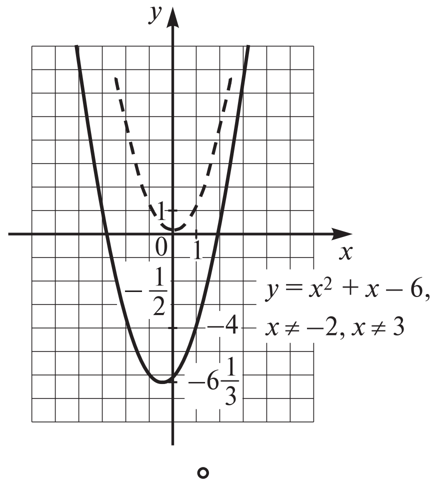
$$(x+2)(x-3)=0 \quad \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-2 \\ x=3 \end{array}\right. .$$

$D(f) = (-\infty; -2) \cup (-2; 3) \cup (3; +\infty)$.

2. Чтобы построить график функции, преобразуем алгебраическую дробь:

$$\frac{x^4-13x^2+36}{(x+2)(x-3)}=\frac{(x^2-4)(x^2-9)}{(x+2)(x-3)}=$$
$$=(x-2)(x+3)=x^2+x-6$$

Построим график функции $y = x^2 + x - 6$ с учетом области определения данной функции.



1) $x_0=-\frac{1}{2}$, $y_0=-6\frac{1}{4}$

$\left(-\frac{1}{2};-6\frac{1}{4}\right)$ координаты вершины параболы;

2) $y=x^2+x-6 \quad \Leftrightarrow \quad y=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-6\frac{1}{4}$

Построим параболу, выполняя параллельный перенос параболы $y = x^2$ влево вдоль оси Ox на $\frac{1}{2}$ единицы и вниз вдоль оси Oy на $6\frac{1}{4}$ единицы.

3. Дополнительные точки:

x	–3	–2	0	2	3
y	0	–4	–6	0	6

Графиком является парабола с двумя «выколотыми» точками (–2; –4) и (3; 6).

№76.

1) Данная функция возрастающая. Найдем ее значения на концах заданной области определения: $y(0)=\frac{1}{3}\cdot 0+1=1$ и $y(3)=\frac{1}{3}\cdot 3+1=2$. Тогда числовой промежуток области значений, соответствующий $x \in [0; 3]$, принимает вид: $y \in [1; 2]$.

$X \to У$ (X: $x \in [0; 3]$, $У$: $y \in [1; 2]$).

2) Чтобы найти значение x, надо решить уравнение относительно x. Но удобнее выразить из формулы $y=\frac{1}{3}x+1$ переменную x: $x = 3y - 3$ и провести вычисления.

Если $y = 1$, то $x = 0$.
Если $y = 1{,}4$, то $x = 1{,}2$.
Если $y = 2$, $x = 3$.
Если $y = 4$, то $x = 9$.

№81.

Пусть 1400 – количество элементов пространства элементарных событий M = «новые карты памяти», а 56 – количество элементарных событий, благоприятствующих событию A = «карты памяти неисправны», $A \subset M$. Тогда вероятность события A найдем по правилу $p(A)=\frac{m}{n}$. Получаем $p(A)=\frac{56}{1400}=\frac{1}{25}$.

Вероятность того, что карта памяти исправна, определим так: $1-\frac{1}{25}=\frac{24}{25}$.

Ответ: $\frac{24}{25}$.

№82.

От 30 до 54 содержится 25 натуральных чисел. Значит, пространство элементарных событий состоит из 25 элементов – чисел от 30 до 54. 13 – это число четных чисел в этом числовом промежутке, то есть 13 – количество элементарных событий, благоприятствующих событию A = «число четное», $A \subset M$. Тогда вероятность события A найдем по правилу $p(A)=\frac{m}{n}$, $p(A)=\frac{13}{25}=0{,}52$.

Ответ: вероятность того, что случайно выбранное натуральное число от 30 до 54 делится на 2, равна 0,52.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений.

Рассмотрим решение **нестандартных задач** данного пункта.

№95.*

Пусть в классе x ребят младше Пети, тогда $2x$ ребят старше Пети. Итак, в классе $3x+1$ ребят. Пусть в классе y ребят старше Кати, тогда $3y$ ребят младше Кати. Итак, в классе $4y+1$ ребят. Это означает, что число учеников в классе имеет вид $N = 3x + 1$ и $N = 4y + 1$, откуда $N - 1 = 3x$ и $N - 1 = 4y$ Таким образом, число $N - 1$ делится и на 3, и на 4, то есть оно делится на 12. Единственное такое число между 19 и 29 – это 24. Значит, $N - 1 = 24$, откуда $N = 25$.

Ответ: 25 учеников.

№96.*

Рассмотрим шахматную раскраску нашей доски. Заметим, что после хода как слон слонопотам попадает в клетку того же цвета, а после хода как конь слонопотам попадает в клетку другого цвета. Пусть для определенности слонопотам начинает обход с черной клетки. Возможны два случая. Если слонопотам начинает ходить как слон, то цвета клеток будут меняться следующим образом: ч-ч-б-б-ч-ч-б-б-ч-ч-б-б-ч-ч-б-б-ч-ч-б-б-ч-ч-б-б-ч (всего он должен сделать 24 хода). Если же слонопотам начинает ходить как конь, то цвета клеток будут меняться таким образом: ч-б-б-ч-ч-б-б-ч-ч-б-б-ч-ч-б-б-ч-ч-б-б-ч-ч-б-б-ч-ч. И в том и в другом случае слонопотам должен закончить путь в клетке того же цвета, что и клетка начала обхода. А так как соседние клетки имеют разные цвета, то закончить обход в соседней клетке слонопотам не сможет.

Ответ: не может.

§ 2. Элементы комбинаторики и теории вероятностей

П.1.2.1. Перестановки с повторениями

Основные содержательные цели.

1) Построить правило подсчета количества перестановок элементов, среди которых есть одинаковые и сформировать умение его применять.

2) Сформировать понятие перестановки с повторениями. Вывести общую формулу количества перестановок и сформировать умение ее применять.

3) Закрепить умение доказывать неравенства и находить наименьшее (наибольшее) значение выражений с помощью доказанных неравенств. Повторить понятие графика функции, закрепить умение работать с графиками и использовать их для решения уравнений.

Для **самостоятельного открытия** способа подсчета количества перестановок элементов, среди которых есть одинаковые, рекомендуется выполнить №97 – №98.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№99.

В слове «УРАВНЕНИЕ» всего 9 букв, буква Н встречается 2 раза, буква Е – 2 раза, буквы У, Р, А, В, И – по одному разу.

По общей формуле количества перестановок получим ответ: $\frac{9!}{2!\cdot 2!}=90\,720$.

Ответ: 90 720 «слов».

№100.

В слове «ПАРАБОЛА» всего 8 букв, буква А встречается 3 раза, остальные – по одному разу.

По общей формуле количества перестановок получим ответ: $\frac{8!}{3!}=4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8=6720$.

Ответ: 6 720 «слов».

№101.

Если в слове нет букв Б, то получается 1 слово только из 5 букв А.

В случае одной буквы Б, имеем всего 6 букв, из которых 5 одинаковые, тогда по общей формуле количества перестановок получим ответ: $\frac{6!}{5!}=6$.

В случае двух букв Б, имеем всего 7 букв, из которых А встречается 5 раз, а Б – 2 раза, тогда по общей формуле количества перестановок получим ответ: $\frac{7!}{5!\cdot 2!}=\frac{6\cdot 7}{2}=21$.

В случае трех букв Б, имеем всего 8 букв, из которых А встречается 5 раз, а Б – 3 раза, тогда по общей формуле количества перестановок получим ответ: $\frac{8!}{5!\cdot 3!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 3}=56$.

1+6 +12 + 56 = 75.

Ответ: 75 «слов».

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№116. *

Зафиксируем одно кресло. Будем рассаживать юношей и девушек за стол, начиная с этого кресла, по часовой стрелке. Разберем два случая.

1) В него посадим юношу. Это можно сделать 5 способами. Девушку, которая сядет от него слева, можно выбрать 5 способами. Теперь следующего юношу, который сядет на соседнее место слева, можно выбрать 4 способами. Продолжая рассадку, мы получим $5\cdot 5\cdot 4\cdot 4\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 1=(5!)^2=14400$ способов.

2) Если сначала в выбранное кресло мы посадим девушку, то аналогично получим 14400 способов.

Итого получим 14400+14400=28800 способов рассадки.

Ответ: 28800.

П. 1.2.2. Размещения

Основные содержательные цели.

1) Построить способ подсчета количества вариантов выбора в определенном порядке k элементов из n и сформировать умение его применять.

2) Сформировать понятие размещения, познакомить учащихся с обозначениями, принятыми в комбинаторике и формулой числа размещений.

3) Тренировать умение подсчитывать число перестановок с повторениями и без повторений. Закрепить умение выполнять преобразования выражений с корнями. Повторить понятие четной и нечетной функции, способы построения графиков функций и закрепить умение использовать их для решения систем уравнений с двумя неизвестными.

Для **самостоятельного открытия** способа подсчета количества вариантов выбора в определенном порядке k элементов из n рекомендуется выполнить №117.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№118.

Комбинировать будем четыре цифры из пяти. Первую из четырёх цифр числа можно выбрать 5 способами; если первая цифра фиксирована, то вторую можно выбрать 4 способами; если первые две цифры фиксированы, то третью можно выбрать 3 способами; и, наконец, если первые три цифры фиксированы, то четвёртую можно выбрать 2 способами. Следовательно, искомое количество будет равно: $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 120$.

Аналогично рассуждая, найдем количество трехзначных чисел и двузначных.

То есть: $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ и $5 \cdot 4 = 20$.

Ответ: 120 четырехзначных чисел, 60 трехзначных и 20 двузначных.

№121.

Для ответа на вопрос задачи нужно разместить всеми возможными способами в определенном порядке по 3 фотографии из 6 и по 3 фотографии из 8.

Значит, искомое число способов равно числу размещений по 3 элемента из 6 и по 3 элемента из 8: $A_6^3 = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$ и $A_8^3 = 8 \cdot 7 \cdot 6 = 336$.

Ответ: 6 фотографий можно разложить 120 способами, а 8 фотографий – 336 способами.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№135.*

Предположим, что Вася прогулял ровно 64 урока. Заметим, что сентябрь содержит четыре полных недели и еще два подряд идущих дня. За одну полную неделю Вася прогулял $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ уроков. То есть за четыре недели Вася прогулял ровно 60 уроков, а за два подряд идущих дня – 4 урока. Но если среди этих двух дней есть выходной, то оставшийся день – понедельник или пятница, что не подходит. Если же оба дня учебные, то Вася должен был прогулять нечетное количество уроков (3, 5, 7 или 9), что также не подходит. Значит, Вася не мог прогулять ровно 64 урока.

Ответ: не могло.

П. 1.2.3. Сочетания

Основные содержательные цели.

1) Построить способ подсчета вариантов выбора k элементов из n-элементного множества, когда порядок чисел не существенен, и сформировать умение его применять.

2) Сформировать понятие сочетания, познакомить учащихся с обозначениями, принятыми в комбинаторике и формулой числа сочетаний.

3) Сформировать представление о биномиальных коэффициентах, как о числах вида $C_n^k = \dfrac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$ и о некоторых их свойствах.

4) Тренировать умение находить число вариантов выбора в определенном порядке k элементов из n. Закрепить умение выполнять преобразования выражений с корнями. Повторить способы решения рациональных уравнений.

Для **самостоятельного открытия** способа подсчета вариантов выбора k элементов из n-элементного множества, когда порядок чисел не существенен, рекомендуется выполнить №136 – №138.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№139.

а) Так как порядок выбора ребят для участия в футбольном турнире роли не играет, то искомое число равно

$$C_{15}^{11} = \frac{A_{15}^{11}}{P_{11}} = \frac{15\cdot14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10\cdot11} = \frac{12\cdot13\cdot14\cdot15}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 1365.$$

б) Вратаря можно выбрать 15 способами, из оставшихся 14 человек нужно выбрать 10 игроков, что можно сделать C_{14}^{10} способами, тогда всего по правилу произведения:

$$15\cdot C_{14}^{10} = 15\cdot\frac{A_{14}^{10}}{P_{10}} = 15\cdot\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11\cdot10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6\cdot5}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7\cdot8\cdot9\cdot10} = 15\cdot\frac{14\cdot13\cdot12\cdot11}{1\cdot2\cdot3\cdot4} = 15015.$$

Ответ: а) 1 365 способами; б) 15015 способами.

№140.

$$C_n^2 = \frac{n!}{(n-2)!\cdot2!} = \frac{n(n-1)}{2!} = \frac{n(n-1)}{2}.$$

№141.

$$C_{10}^3 = \frac{10!}{7!\cdot3!} = \frac{10\cdot9\cdot8}{3!} = 120.$$

№142.

а) Если на табло горят цифры *ab.cd.mn*, то $a \ne 7$, $c \ne 7$, $m \ne 7$ так как $a \leqslant 2$, $c \leqslant 5$, $m \leqslant 5$. Поэтому $b = d = n = 7$. Но тогда $a = 0$ или 1, $c = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $m = 0, 1, 2, 3, 4, 5$. Всего получается $2\cdot6\cdot6 = 72$ подходящих набора цифр, а каждый набор горит 1 секунду.

б) Если на табло горят цифры *ab.cd.mn*, то $a \ne 3$, поэтому возможны 5 случаев, когда одна из цифр b, c, d, m, n не равна 3, а остальные равны 3.

1) На табло *ab*.33.33, где $b \ne 3$. Таких наборов 21.

2) На табло *a*3.*c*3.33, где $c \ne 3$. Здесь a может принимать любое из трех значений 0, 1 или 2, c – любое из пяти значений 0, 1, 2, 4 или 5. Таких наборов $3\cdot5 = 15$.

3) На табло *a*3.3*d*.33, где $d \ne 3$. Здесь $a = 0, 1, 2$, $d = 0, 1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9$, всего $3\cdot9 = 27$ наборов.

4) *a*3.33.*m*3 – 15 наборов.

д) *a*3.33.3*n* – 27 наборов.

Всего $21 + 15 + 27 + 15 + 27 = 105$ наборов, каждый из которых горит 1 секунду.

в) Если на табло горят цифры *ab.cd.mn*, то $a = 0, 1, 2$; $0 \leqslant b \leqslant 9$, $0 \leqslant c \leqslant 5$, $0 \leqslant d \leqslant 9$, $0 \leqslant m \leqslant 5$, $0 \leqslant n \leqslant 9$. Поэтому если $a = n$, $b = m$, $c = d$, то симметричное число на табло однозначно определяется по цифрам a, b и c, где $a = 0, 1, 2$; $0 \leqslant b \leqslant 5$, $0 \leqslant c \leqslant 5$. При этом если $a = 0$ или 1, то b и c – любые цифры от 0 до 5, количество таких наборов чисел равно $2\cdot6\cdot6 = 72$. Если же $a = 2$, то $b = 0, 1, 2, 3$; $0 \leqslant c \leqslant 5$, и количество таких наборов равно $4 \cdot 6 = 24$. Всего $72 + 24 = 96$ наборов чисел, каждый из которых горит 1 секунду.

Ответ: а) 72 с; б) 105 с; в) 96 с.

№143.

В одну волейбольную команду 6 человек можно выбрать C_{12}^6 способами. Тогда вторая команда определится однозначно. При этом каждое такое разбиение на две команды мы посчитали дважды. Поэтому искомое количество способов $\frac{C_{12}^6}{2} = \frac{12!}{6! \cdot 6! \cdot 2} = 462$.

Ответ: 462.

№144.

Весь путь состоит из 15 «шагов». При этом вид пути определяется последовательностью выбора (порядком) горизонтальных и вертикальных «шагов». Значит, число путей равно количеству способов выбрать 5 вертикальных «шагов» из 15 (или 10 горизонтальных из 15), то есть $C_{15}^5 = C_{15}^{10} = \frac{15!}{10! \cdot 5!} = 3003$.

Ответ: 3003.

№145.

Заметим, что на каждой из прямых должно лежать ровно по две вершины четырехугольника. На одной из прямых две вершины можно выбрать $C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$ способами. Для каждого такого способа на другой прямой две вершины можно выбрать $C_{12}^2 = \frac{12 \cdot 11}{2} = 66$ способами. Тогда общее число способов выбрать четыре вершины есть $45 \cdot 66 = 2970$.

Ответ: 2970.

№146.

Пусть x – количество чисел от 1 до 1 000 000, делящихся на 11, y – делящихся на 13, z – делящихся и на 11, и на 13. Очевидно, что $x > y$. Но тогда количество чисел, делящихся на 11, но не делящихся на 13, есть $x - z$, а количество чисел, делящихся на 13, но не делящихся на 11, есть $y - z$. Так как $x > y$, то $x - z > y - z$, то есть делящихся на 11, но не делящихся на 13 больше.

Ответ: чисел делящихся на 11, но не делящихся на 13, больше.

№147.

Сколькими способами они могут усесться на одной лавке?

$P_4 = 4! = 24$.

Сколькими способами из них можно организовать трио?

$C_4^3 = \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{3!} = 4$.

Сколькими способами выбранное из них трио можно рассадить на одной лавке?

$P_3 = 3! = 6$.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№159.*

В первую команду 6 человек можно выбрать C_{24}^6 способами. Из оставшихся 18 человек во вторую команду 6 человек можно выбрать C_{18}^6 способами. Из оставшихся 12 человек в третью команду 6 человек можно выбрать C_{12}^6 способами. А четвертая команда определится однозначно. Таким образом, получилось $C_{24}^6 C_{18}^6 C_{12}^6$ способов. Но порядок команд не важен, поэтому найденное число нужно поделить на 4! – число способов упорядочить четыре команды. Значит, искомое число

способов $\dfrac{C_{24}^6 C_{18}^6 C_{12}^6}{4!} = \dfrac{\dfrac{24!}{6!\cdot 18!}\cdot\dfrac{18!}{6!\cdot 12!}\cdot\dfrac{12!}{6!\cdot 6!}}{4!} = \dfrac{24!}{4!\cdot(6!)^4}$.

Ответ: $\dfrac{C_{24}^6 C_{18}^6 C_{12}^6}{4!} = \dfrac{24!}{4!\cdot(6!)^4}$.

№160.*

Чтобы получить шестизначное число, у которого каждая последующая цифра меньше предыдущей, нужно из числа 9876543210 вычеркнуть любые 4 цифры (или оставить любые 6 цифр).

Это можно сделать $C_{10}^4 = C_{10}^6 = \dfrac{10!}{4!\cdot 6!} = 210$ способами.

Ответ: 210.

№161.*

Будем называть белые и красные полосы ткани *зелеными*.

Обозначим через T_n количество способов, которыми можно украсить витрину при наличии n полос ткани. Первой полосой может быть только зеленая.

Если вторая полоса синяя, то далее должны следовать $n - 2$ полосы, причем первая из них зеленая. Всего способов так развесить полосы – T_{n-2}.

Если вторая полоса тоже зеленая, то вместе с ней оставшихся полос $n - 1$ и развесить их можно T_{n-1} способами.

Итак, $T_n = T_{n-1} + T_{n-2}$.

Очевидно, что $T_1 = 2$ (одна полоса может быть либо белой, либо красной), $T_2 = 2$ (две полосы могут быть либо белой и красной, либо красной и белой).

Все последующие T_n считаются по полученной формуле:

$T_3 = T_2 + T_1 = 4$, $T_4 = T_3 + T_2 = 6$, ..., $T_{12} = T_{11} + T_{10} = 288$.

Ответ: 288.

П. 1.2.4. Применение комбинаторики при решении вероятностных задач. Геометрическая вероятность

Основные содержательные цели.

1) Сформировать понятие геометрической вероятности.

2) Сформировать умение применять комбинаторные и геометрические рассуждения при решении задач на поиск вероятности.

3) Повторить понятия достоверного, невозможного и случайного событий, понятия совместных и несовместных событий. Закрепить умение применять теорему Виета и обратную ей теорему, умение решать уравнения с параметром, находить наименьшее и наибольшее значение квадратного трехчлена на заданном отрезке.

Для **самостоятельного открытия** способа применения комбинаторики при решении задач на поиск вероятности рекомендуется выполнить №162 – №164. Для **самостоятельного открытия** способа применения геометрических рассуждений при решении задач на поиск вероятности рекомендуется выполнить №171.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№165.

а) Вероятность того, что полученное число будет делиться на 5, равна отношению количества чисел, составленных из цифр от 5, 7, 9 и кратных 5, к количеству всех чисел, которые можно составить из этих цифр.

По условию, каждая цифра используется в записи числа один раз (задействованы все цифры), поэтому общее количество чисел, составленных из этих цифр, равно количеству перестановок из трех элементов: $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$. Чтобы это число делилось на 5, последняя цифра должна быть 5. Следовательно, последняя цифра зафиксирована, а из оставшихся двух цифр 7 и 9 можно составить $P_2 = 2! = 1 \cdot 2 = 2$ варианта чисел. Значит, искомая вероятность равна $p = 2:6 = \frac{1}{3}$.

Этот ответ можно получить иначе, без применения формул комбинаторики.

Делимость числа на 5 зависит от его последней цифры. Множество всех исходов события содержит три элемента: последней цифрой может оказаться 5, 7 или 9. Множество благоприятных событий содержит одни элемент – последней цифрой окажется 5.

Отсюда искомая вероятность равна $p = 1:3 = \frac{1}{3}$.

б) Аналогично, искомая вероятность равна $p = \frac{1}{3}$.

№ 166.

Множество всех исходов равно количеству наборов по 6 элементов из 49 (порядок чисел в наборе значения не имеет), то есть C_{49}^6.

Множество благоприятных исходов содержит только один из этих наборов, определенный розыгрышем.

Тогда вероятность выигрыша составляет:

$$p = 1 : C_{49}^6 = 1 : \frac{49!}{43! \cdot 6!} = 1 : \frac{49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 45 \cdot 44}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} = \frac{1}{49 \cdot 47 \cdot 46 \cdot 3 \cdot 44} = \frac{1}{13983816} \approx 0{,}00000007.$$

№170.

Общее число исходов равно количеству способов, которыми можно выбрать 6 микроскопов из 10. Оно равно $C_{10}^6 = \frac{10!}{6!(10-6)!} = \frac{7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 210$ (порядок микроскопов в выборе ученика не является существенным).

Число благоприятных исходов равно числу способов выбора 6 микроскопов из 8 исправных. Это число есть $C_8^6 = \frac{8!}{6!(8-6)!} = \frac{7 \cdot 8}{1 \cdot 2} = 28$.

Значит, искомая вероятность равна $p(A) = \frac{28}{210} = \frac{2}{15}$.

Ответ: вероятность того, что все взятые микроскопы исправные, равна $\frac{2}{15}$.

№172.

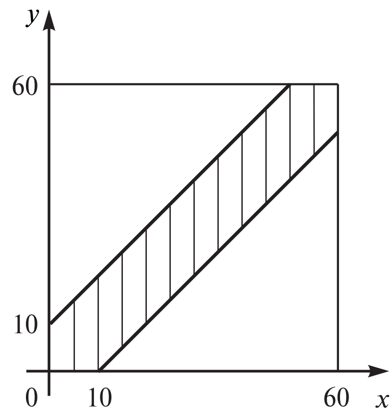
Искомая вероятность равна отношению площади нужного квадрата со стороной 10 см к площади всей мишени, которая составляет по условию 300 см^2.

Тогда искомая вероятность равна $p = \frac{10 \cdot 10}{300} = \frac{1}{3}$.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№197.*



Пусть первый математик пришел на встречу в 12 часов x минут, а второй – в 12 часов y минут. Изобразим на плоскости Oxy множество событий.

По условию, $0 \leqslant x, y \leqslant 60$ (квадрат на плоскости). А событие «друзья встретились» задается условием:

$|x - y| \leqslant 10$, то есть $x - 10 \leqslant y \leqslant x + 10$ (см. рис., на рисунке эта область заштрихована).

Площадь квадрата равна $S = 3600$. А площадь заштрихованной части равна $S_B = S - 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 50\cdot 50\right) = 1100$. Значит, вероятность того, что друзья встретятся, равна $\frac{S}{S_B} = \frac{1100}{3600} = \frac{11}{36}$.

Ответ: $\frac{11}{36}$.

№198.*

Заметим, что сумма чисел, записанных на двух соприкасающихся гранях, нечетна. Таких пар граней в кубе $3 \cdot 3 \cdot 6 = 54$, т.е. сумма чисел, записанных на гранях, расположенных внутри куба, есть сумма 54 нечетных чисел. Значит, она четна. Обозначим ее $2S$. Посчитаем сумму чисел, записанных на поверхности большого куба. Она равна $(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)27 - 2S$, т. е. нечетному числу. Значит, это число не может равняться $6m$.

Ответ: не мог.

§3*. Метод математической индукции

П. 1.3.1*. Принцип математической индукции

Основные содержательные цели.

1) Уточнить представления учащихся об индуктивном способе рассуждений.

2) Познакомить учащихся с принципом математической индукции, как со способом доказательства свойства элементов бесконечных множеств.

3) Построить алгоритм доказательства утверждений методом математической индукции и умение его применять.

4) Закрепить умение подсчитывать количество сочетаний, выполнять преобразования выражений с корнями, решать неравенства методом интервалов.

Для **самостоятельного открытия** метода математической индукции рекомендуется выполнить №203, задания №200 – №202 готовит учащихся к этому открытию.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№200.

Каждому значению аргумента x поставлено в соответствие $y = x^2 - 2$. Какое значение функции будет соответствовать аргументу 0; 3; n; $n + 1$?

Ответ: -2; 7; $n^2 - 2$; $(n + 1)^2 - 2$.

№201.

а) $2n$, $n \in N$;

б) $2n - 1$, $n \in N$;

в) $n, n+1, n \in \mathbf{N}$;

г) $n, n+1, n+2, n \in \mathbf{N}$;

д) $2n, 2(n+1), n \in \mathbf{N}$.

№202.

Обозначив числа n, $n+1$, $n+2$, получим, что их сумма $n+(n+1)+(n+2) = 3n+3 = 3(n+1)$ кратна 3.

№203.

а) Утверждение верно при $n = 1$. Действительно, $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ делится на 6.

б) $n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$делится на 6.

в) $(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3) = (n+1) \cdot (n+2) \cdot n + (n+1) \cdot (n+2) \cdot 3$. Первое слагаемое делится на 6 по предположению, а второе слагаемое делится на 6, так как $(n+1) \cdot (n+2)$делится на 2 (среди двух последовательных натуральных чисел есть четное).

Значит, $(n+1) \cdot (n+2) \cdot (n+3)$ тоже делится на 6.

№204.

Докажем утверждение по индукции.

База индукции. Утверждение верно при $n = 1$. Действительно, $1 = \frac{1(1+1)}{2}$.

Шаг индукции.

Пусть утверждение верно при $n = k$, то есть $S_k = 1+2+...+k = \frac{k(k+1)}{2}$. Докажем его для $n = k+1$.

$$S_{k+1} = 1+2+...+k+(k+1) = S_k + k+1 = \frac{k(k+1)}{2} + k+1 = (k+1)\left(\frac{k}{2}+1\right) = \frac{(k+1)(k+2)}{2} =$$

$= \frac{(k+1)((k+1)+1)}{2}$, что и требовалось.

№205.

База индукции. Утверждение верно при $n = 1$.

Действительно, $1 \cdot 2 \cdot 3 = \frac{1}{4} \cdot 1(1+1)(1+2)(1+3) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}{4}$.

Шаг индукции.

Пусть утверждение верно при $n = k$, то есть $S_k = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3)$. Докажем его для $n = k+1$.

$$S_{k+1} = S_k + (k+1)(k+2)(k+3) = \frac{1}{4}k(k+1)(k+2)(k+3) + (k+1)(k+2)(k+3) =$$

$$= (k+1)(k+2)(k+3)\left(\frac{1}{4}k+1\right) = (k+1)(k+2)(k+3)\left(\frac{k+4}{4}\right) =$$

$$= \frac{1}{4}(k+1)((k+1)+1)((k+1)+2)((k+1)+3),$$

что и требовалось.

№206.

База индукции. Утверждение верно при $n = 1$. Действительно, $2^1 > 1$.

Шаг индукции. Пусть утверждение верно при $n = k$, то есть $2^k > k$. Докажем его для $n = k+1$.

$2^{k+1} = 2 \cdot 2^k > 2 \cdot k = k + k \geqslant k+1$ то есть $2^{k+1} > k+1$, что и требовалось.

№207.

База индукции. Утверждение верно при $n = 1$. Действительно, $\frac{(2)!}{(1!)^2} = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{4^1}{1+1}$.

Шаг индукции. Пусть утверждение верно при $n = k$. Докажем его для $n = k + 1$.

$$\frac{(2(k+1))!}{((k+1)!)^2}=\frac{(2k)!\cdot(2k+1)(2k+2)}{(k!)^2(k+1)^2}\geqslant\frac{4^k(2k+1)(2k+2)}{(k+1)(k+1)^2}=\frac{4^k(2k+1)2}{(k+1)^2}.$$

Нам осталось доказать, что $\frac{4^k(2k+1)2}{(k+1)^2}\geqslant\frac{4^{k+1}}{(k+1)+1}$, то есть $\frac{(2k+1)}{(k+1)^2}\geqslant\frac{2}{k+2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (2k + 1)(k + 2) \geqslant 2(k+1)^2 \Leftrightarrow k \geqslant 0$, что и требовалось.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений.

Рассмотрим решение **нестандартных задач** данного пункта.

№227.*

Из тождества $n! \cdot (n+2)= n! \cdot (n+1+1)= (n+1)!+n!$ следует, что искомое выражение $S = 2! + 1! - 3! - 2! + 4! + 3! - 5! - 4! + ... + 2000! + 1999! - 2001! - 2000! + 2001! = 1$.

Ответ: 1.

№228.*

Докажем утверждение по индукции.

База индукции. Утверждение верно при $n = 2$. Действительно, если $x+\frac{1}{x}$ – целое, то $x^2+\frac{1}{x^2}=\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2$ – тоже целое.

Шаг индукции. Пусть утверждение верно для $n \leqslant k$, докажем его для $n = k + 1$.

Рассмотрим выражение $\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}+x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}$. Отсюда $x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}=\left(x^k+\frac{1}{x^k}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}\right)$ – целое как разность целых чисел, что и требовалось.

П. 1.3.2*. Применение метода математической индукции в разных задачах

Основные содержательные цели.

1) Сформировать умение применять метод математической индукции при решении различных задач.

2) Закрепить умение решать задачи на числа подсчет вариантов, решать и доказывать неравенства.

Рекомендуется организовать изучение данного пункта, как урок рефлексии коррекционного или тренировочного типа.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№229.

Докажем утверждение по индукции.

База индукции. Утверждение верно при $n = 1$. Действительно, $1^2 + 1 = 2$ – четно.

Шаг индукции. Пусть утверждение верно при $n = k$, то есть $k^2 + k$ четно.

Докажем его для $n = k + 1$.

Рассмотрим число $(k + 1)^2 + (k + 1) = k^2 + 2k + 1 + k + 1 = k^2 + k + 2k + 2 = (k^2 + k) + 2(k + 1)$. Оно четно как сумма двух четных чисел.

№230.

Докажем утверждение по индукции.

База индукции. Утверждение верно при $n = 1$. Действительно, $3^{2+2} + 8 \cdot 1 - 9 = 81 + 8 - 9 = 80$ делится на 16.

Шаг индукции. Пусть утверждение верно при $n = k$, то есть $3^{2k+2} + 8k - 9$ делится на 16. Значит, $3^{2k+2} + 8k - 9 = 16m$.

Докажем утверждение для $n = k + 1$.

Рассмотрим число

$3^{2(k+1)+2} + 8(k + 1) - 9 = 9 \cdot 3^{2k+2} + 8k + 8 - 9 = 9 \cdot 3^{2k+2} + (9 - 8) \cdot 8k + 8 - (9 - 8) \cdot 9 =$
$= 9 \cdot (3^{2k+2} + 8k - 9) - 8 \cdot 8k + 8 \cdot 9 + 8 = 9 \cdot 16m + 16 \cdot (5 - 4k) = 16 \cdot (9m + 5 - 4k)$.

Оно делится на 16, что и требовалось.

№231.

а) Подойдет число 6. Действительно, $6 = 1 + 2 + 3$.

б) Построим требуемое число. Покажем, как из числа, которое равно сумме n своих различных делителей, получить число, которое равно сумме $n + 1$ своих различных делителей.

Пусть число x равно сумме n своих различных делителей. Рассмотрим число $2x$. Кроме делителей числа x у этого числа будет делителем число x (при этом этот делитель новый). Но тогда сумма этих $n + 1$ своих различных делителей (n делителей числа x и числа x) равна $2x$, что и требовалось.

Но в пункте а) мы показали, что число 6 равно сумме 3 своих различных делителей. Тогда число $2 \cdot 6 = 12$ равно сумме 4 своих различных делителей ($12 = 1 + 2 + 3 + 6$). Действуя аналогично, получим, что число $2^{97} \cdot 6 = 2^{98} \cdot 3$ равно сумме 100 своих различных делителей.

Замечание. В задаче не требуется, чтобы число равнялось сумме всех своих делителей (например, у 12 есть делитель 4, который мы не включали в сумму).

Ответ: а) 6; б) $2^{98} \cdot 3$.

№232.

Разобьем стаканы на пары

$A_1 - A_2$, $B_1 - B_2$, $C_1 - C_2$, $D_1 - D_2$, $E_1 - E_2$, $F_1 - F_2$, $G_1 - G_2$, $H_1 - H_2$.

Теперь уравняем количества воды в каждой паре стаканов. Таким образом, мы получим два одинаковых набора по 8 стаканов: набор A_1, B_1, C_1, D_1, E_1, F_1, G_1, H_1 и набор A_2, B_2, C_2, D_2, E_2, F_2, G_2, H_2. Значит, нам осталось уравнять количество воды в первой восьмерке, а потом аналогично во второй восьмерке. Мы свели исходную задачу к аналогичной, но для восьми стаканов. Теперь разобьем стаканы в восьмерке на пары и сведем задачу к задаче про четыре стакана. Разбив стаканы в четверке на пары, мы сведем задачу к задаче про два стакана. А в двух стаканах количества воды уравнивать мы умеем по условию.

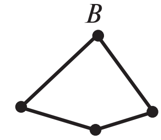


Рис. 1

№233.

При $n = 3$ подойдет равносторонний треугольник.

При $n > 3$ докажем утверждение по индукции.

База индукции. Утверждение верно при $n = 4$. Пример приведен на рисунке 1 (углы A, B, C — острые, угол D — тупой).

Шаг индукции. Пусть у нас есть выпуклый n-угольник, имеющий ровно три острых угла. Покажем, как из него получить выпуклый $n + 1$-угольник, имеющий ровно три острых угла. Пусть в рассматриваемом выпуклом n-угольнике угол KLM — тупой (см. рис.2). Выберем точку X на отрезке KL и точку Y на отрезке LM. Рассмотрим новый выпуклый $n + 1$-угольник, который получается из рассматриваемого заменой сторон KL

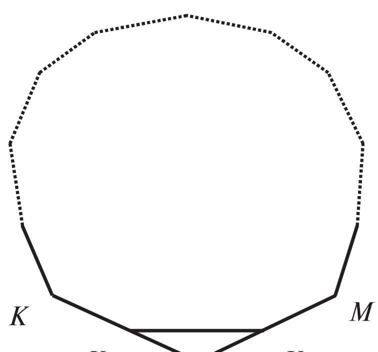


Рис. 2

и LM на стороны KX, XY и YM. Заметим, что углы KXY и XYM – тупые. Действительно, угол KXY – внешний угол треугольника XLY. Поэтому $\angle KXY = \angle XLY + \angle XYL > \angle XLY > 90°$. Аналогично, $\angle XYM > 90°$. Значит, у получившегося выпуклого $n+1$-угольника также ровно три острых угла, что и требовалось.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений.

Рассмотрим решение **нестандартных задач** данного пункта.

№250.*

Пусть x – количество монет однорублевых монет, y – количество двухрублевых монет и z – количество пятирублевых монет, причем $x, y, z \geqslant 10$.

Составим систему: $\begin{cases} x+2y+5z=2000 \\ x+y+z=1000 \end{cases}$.

Умножим второе уравнение на 2 и вычтем его из первого. Получим $3z - x = 0$. То есть $x = 3z$, где $z \geqslant 10$. Поэтому x – составное число.

№251.*

а) Один из разбойников делит добычу на две части, равноценные по его мнению. Значит, он готов взять любую часть. После этого он предлагает второму разбойнику выбрать любую из этих двух частей. Так как эти две части образуют всю добычу, то хотя бы одну часть второй разбойник должен оценить не менее чем в половину. Выбрав эту часть, он также будет доволен.

б) Сначала два разбойника разделят добычу так, чтобы каждый из них считал, что он обладает не менее чем половиной добычи (см. пункт а). После этого каждый из этих двух разбойников делит свою часть добычи на три равные части. После этого третий разбойник должен забрать у каждого по одной части. После этого все разбойники будут считать, что они получили не меньше, чем треть добычи. Докажем это. Первый разбойников считает, что сначала он выбрал не менее половины добычи. Потом он разделил свою добычу на 3 равные части (по его мнению). И ему осталось две таких части из трех. Значит, он считает, что получил не менее $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$ добычи. Так же рассуждает и второй разбойник. Пусть третий разбойник считает, что при первом разделе первый взял себе x-ую часть добычи, а второй y-ую. ($x+y=1$). При этом он считает, что после этого он взял у каждого из первых двух разбойников не менее чем по трети от их частей. То есть он взял не менее $\frac{x}{3}+\frac{y}{3}=\frac{1}{3}(x+y)=\frac{1}{3}$ добычи. То есть каждый из разбойников будут считать, что он получил не меньше, чем треть добычи.

в) Аналогично пункту б) можно показать, что если существует алгоритм дележки для n разбойников, то существует алгоритм и для $n+1$ разбойников. Тогда, так как есть алгоритм дележки для 2 разбойников, то найдется и требуемый алгоритм для 10 разбойников.

Действительно, пусть n разбойников разделят добычу так, что каждый из них считает, что ему досталось не менее $\frac{1}{n}$ части добычи. После чего каждый из этих n разбойников должен разделить свою часть добычи на $n+1$ равную (по его мнению) часть. А $n+1$ разбойник должен взять у каждого из них по одной части. Тогда, аналогично пункту б), можно показать, что каждый из них будет считать, что ему досталось не менее $\frac{1}{n+1}$ части добычи.

Глава 2. Развитие понятия функции

Вторая глава посвящена повторению и уточнению общего понятия функции, изучению ее свойств, построению графика.

В первом параграфе этой главы расширяются знания учащихся о графиках уравнений и неравенств с двумя неизвестными. На основании понятия о графике уравнения с двумя неизвестными вводится понятие графика функции. Здесь же уточняется определение функции, области определения и множества значений функции, обобщаются знания об основных свойствах функции: нулях функции, интервалах знакопостоянства, возрастании и убывании, наибольшем (наименьшем) значении функции. При углубленном изучении курса девятиклассники уточняют свои представления о четной, нечетной функции, знакомятся с периодической и ограниченной функциями.

Второй параграф посвящен построению и преобразованию графиков. Девятиклассники учатся строить график функции $y = f(x - d) + h$ с помощью графика $y = f(x)$, обобщая известный им с 8 класса способ построения квадратичной функции. Они учатся строить графики, используя симметрию относительно осей. Более подготовленные учащиеся учатся строить график $y = kf(x)$, $y = f(kx)$, $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$ из графика $y = f(x)$. При углубленном изучении курса учащиеся знакомятся с общим планом построения функции, основанном на исследовании ее свойств, а также с дробно-линейной функцией.

Характеристика деятельности учащихся

При изучении содержания второй главы учащиеся:

- *обосновывают* правильность выполненного действия с помощью обращения к общему алгоритму, определению, свойству, плану;
- *записывают* способы действий с помощью алгоритмов, выбирают алгоритм и используют его для выполнения различных задач;
- *строят* графики известных функций и преобразуют их, используя сдвиг вдоль осей, симметрию, сжатие или растяжение относительно осей;
- *применяют изученные способы* преобразования графика для построения графиков функций вида $y = f(x - d) + h$, $y = kf(x)$, $y = f(kx)$, $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$;
- *анализируют* график функции с целью выявления ее свойств;
- *исследуют свойства* функции для построения ее графика;
- *применяют полученные знания* для решения задач практической направленности.

Особенности изучения учебного содержания

При изучении второй главы планированием предусмотрены уроки ОНЗ, структура которых обеспечивает выполнение учащимися целого комплекса универсальных учебных действий. Рассмотрим способ организации урока ОНЗ на примере содержания пункта 2.2.2. «Преобразования графиков функций».

В этом пункте учащиеся знакомятся со способом построения функции $y = f(x - d) + h$ с помощью параллельных переносов графика $y = f(x)$. При углубленном изучении курса учащиеся знакомятся со способом получения графиков $y = kf(x)$ и $y = f(kx)$ из графика $y = f(x)$.

Урок открытия новых знаний выстраивается в соответствии с требованиями технологии деятельностного метода Л. Г. Петерсон (см. раздел «Приложение»). Этап *мотивации* можно начать с обсуждения с учащимися эпиграфа к пункту. Далее учитель сообщает учащимся, что именно этим они и будут заниматься на данном уроке: делать задачу построения «трудных» функций простой.

После чего учитель организует актуализацию нужных для открытия знаний с помощью выполнения заданий № 404 (1, 2).

Рассмотрим пример *структуры открытия нового знания.*

1. Новое знание: способ построения графика функции $y = f(x - d) + h$.

2. Актуализация.

Повторить: способ построения графика линейной функции из графика соответствующей прямой пропорциональности и способ построения квадратичной функции из графика функции $y = ax^2$.

3. Задание на пробное действие.

Построить график функции $y = |x + 3| - 1$.

4. Фиксация затруднения.

Я не могу построить график $y = |x + 3| - 1$.

Я не могу обосновать, что предложенный мною способ построения верный.

5. Фиксация причины затруднения.

Не известен способ построения таких графиков.

6. Цель учебной деятельности.

Выявить способ построения графика функций $y = f(x - d) + h$.

7. Фиксация нового знания.

Учащиеся должны выявить способ построения графика функций $y = f(x - d) + h$.

Открыть новое знание учащиеся могут с использованием текста задания № 404 (3, 4). Учащиеся формулируют гипотезу построения графика $y = |x + 3| - 1$, используя аналогию с уже известным способом построения квадратичной функции, и обобщают ее для всех функций.

При углубленном изучении курса остальные этапы организуются следующим образом. На *этапе первичного закрепления* рекомендуется выполнить задание № 405 (а, б), для *самостоятельной работы* учащимся можно предложить № 406 (б).

На *этапе включения в систему знаний* учитель расширяет представления учащихся об использовании преобразований графика и знакомит учащихся со способом построения графиков $y = kf(x)$, $y = f(kx)$, можно сделать это с помощью текста учебника; далее рекомендуется выполнить № 408.

В общеобразовательном классе 6–8 этапы урока организуются следующим образом. На *этапе первичного закрепления* рекомендуется выполнить задание № 406 (а), для *самостоятельной работы* учащимся можно предложить № 406 (б).

На *этапе включения в систему знаний* рекомендуется выполнить № 405.

Для *повторения* можно предложить учащимся самим выбрать из № 409 — № 413 задание, которое требуется повторить, и разобрать способ его выполнения. На этапе *рефлексии* можно опять обратиться к эпиграфу и предложить учащимся прокомментировать его с точки зрения содержания сегодняшнего урока. После чего учащимся предлагается оценить процесс и результат своей работы на уроке.

Кроме урока открытия нового знания, основные структурные элементы которого рассмотрены выше, планированием предусмотрены и другие типы уроков: *уроки рефлексии тренировочного и коррекционного типа*, где учащиеся вырабатывают и закрепляют свое умение применять новые понятия и способы действий, учатся самостоятельно выявлять и исправлять свои ошибки, корректировать свою учебную деятельность.

В течение изучения второй главы учащимся предлагаются экспресс-тесты, которые можно использовать для урока рефлексии или в качестве домашней работы.

Планированием также предусмотрены и уроки *обучающего контроля*. Перед проведением контрольной работы рекомендуется провести урок рефлексии с использованием содержания соответствующего раздела «Задачи для самоконтроля».

§ 1. Свойства функции

П. 2.1.1. Множество точек на плоскости. Графики уравнений и неравенств

Основные содержательные цели.

1) Сформировать понятия графика уравнения, графика неравенства.

2) Сформировать умение строить график уравнения с двумя неизвестными и график неравенства с двумя неизвестными.

3) Повторить понятия теории множеств. Закрепить умение находить область определения алгебраической дроби, находить наибольшее и наименьшее значения квадратичной функции, решать системы уравнений с двумя неизвестными.

Для **самостоятельного расширения понятия** графика линейного уравнения рекомендуется выполнить № 292 — № 296. Для **самостоятельного расширения понятия** графика линейного неравенства рекомендуется выполнить № 300 — № 301.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 297.

а) Изобразим на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2 + y^2 = 16$.

Из курса геометрии известно, что уравнение вида $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ задает окружность с центром в точке $(a; b)$ и радиусом $|R|$. Значит, уравнению $x^2 + y^2 = 16$ соответствуют те и только те точки плоскости, которые принадлежат окружности с центром в точке (0; 0) и радиусом 4 (рис.1).

б) Уравнению $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 16$ соответствуют только те точки плоскости, которые принадлежат окружности с центром в точке (1;– 2) и радиусом 4 (рис.2).

в) Так как сумма двух неотрицательных чисел равна нулю, только если оба слагаемых равны нулю, то уравнению $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = 0$ соответствует точка на плоскости с координатами (1; –2) — рис.3.

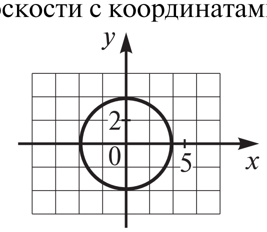


Рис.1

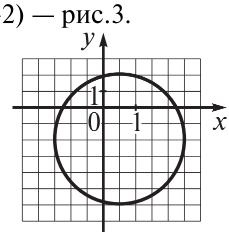


Рис.2

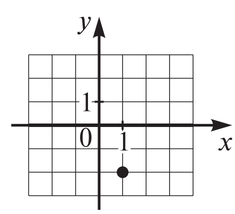


Рис.3

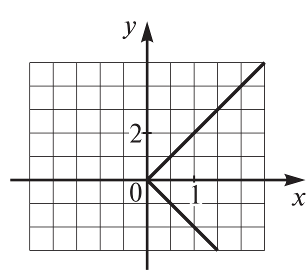
г) Уравнение $(x - 1)^2 + (y + 2)^2 = -16$ не имеет решений, так как сумма двух неотрицательных чисел не может равняться отрицательному.

№ 298.

а) Изобразим график уравнения $|y| = x$

Так как модуль равен неотрицательному числу, то уравнение имеет решение для $x \geqslant 0$. Раскрывая модуль по определению, получим

$$|y| = x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = x \\ y = -x \end{array}\right. \end{cases}$$

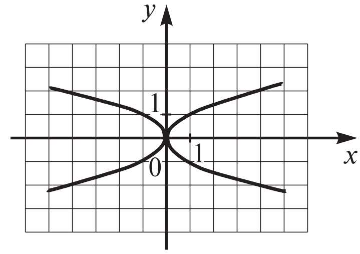


Графиком будет объединение биссектрис I и IV координатных углов.

б) Изобразим график уравнения $y^4 = x^2$, для этого преобразуем заданное уравнение.

$$y^4 = x^2 \iff y^4 - x^2 = 0 \iff (y^2 - x)(y^2 + x) = 0 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} y^2 = x \\ y^2 = -x \end{array}\right.$$

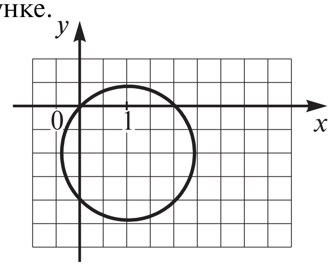


Так как квадрат любого числа равен неотрицательному числу, то уравнение $y^2 = x$ имеет решение для $x \geqslant 0$, а уравнение $y^2 = -x$ имеет решение для $x \leqslant 0$. Так как для $x = 0$: $x = -x$ для однозначности запишем:

$$\left[\begin{array}{l} y^2 = x \\ y^2 = -x \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y^2 = x \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ y^2 = -x \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \geqslant 0 \\ y = \pm\sqrt{x} \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ y = \pm\sqrt{-x} \end{cases} \end{array}\right. \iff \begin{cases} x \geqslant 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{x} \\ y = -\sqrt{x} \end{array}\right. \end{cases} \text{или} \begin{cases} x < 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = \sqrt{-x} \\ y = -\sqrt{-x} \end{array}\right. \end{cases}$$

Полученный график уравнения изображен на рисунке.

в) Изобразим график уравнения $x^2 + y^2 = 2x - 2y$.



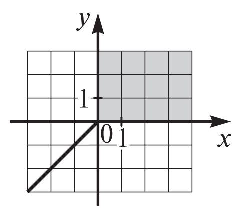
Воспользуемся выделением полного квадрата, приведём исходное уравнение к виду уравнения окружности:

$x^2 + y^2 = 2x - 2y \iff x^2 - 2x + y^2 + 2y = 0 \iff (x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 2$

Полученное уравнение задаёт окружность с центром в точке (1;–1) и радиусом $\sqrt{2}$.

№ 299.

Изобразим график функции $x - |x| = y - |y|$



Раскроем модуль, рассмотрев все возможнее комбинации знаков выражений, стоящих под модулем:

1) Если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, уравнение примет вид $0 = 0$, то есть все точки I четверти удовлетворяют уравнению.

2) Если $x \geqslant 0$, $y < 0$, уравнение примет вид $0 = 2y \iff y = 0$, при данном условии уравнение решений не имеет.

3) Если $x < 0$, $y < 0$, уравнение примет вид $2x = 2y \iff x = y$. Графиком данного уравнения является луч, заключенный в III четверти.

4) Если $x < 0$, $y \geqslant 0$, уравнение примет вид $2x = 0 \iff x = 0$, при данном условии уравнение не имеет решений.

Искомым графиком является первый координатный угол, включая границу, и биссектриса III координатного угла.

№ 300.

а) Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства: $4x - 2y + 6 > 0$. Преобразуем неравенство: $4x - 2y + 6 > 0 \iff y < 2x + 3$.

Искомое множество находиться справа от прямой $y = 2x + 3$.Точки прямой не являются решением (рис.1).

б) Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства: $-2x + y - 2 \geqslant 0$. Преобразуем неравенство: $-2x + y - 2 \geqslant 0 \iff$ $\iff y \geqslant 2 + 2x$

Искомое множество находится слева от прямой $y = 2x + 2$.Точки прямой принадлежат решению данного неравенства (рис.2).

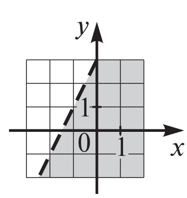


Рис.1

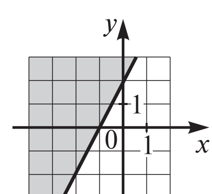


Рис.2

в) Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства: $2x + 3 > 0$.

Преобразуем неравенство: $2x + 3 > 0 \Leftrightarrow x > -1{,}5$.

Искомое множество находится справа от прямой $x = -1{,}5$. Точки прямой не принадлежат решению данного неравенства (рис.3).

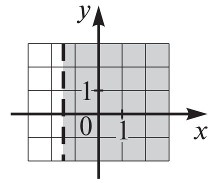
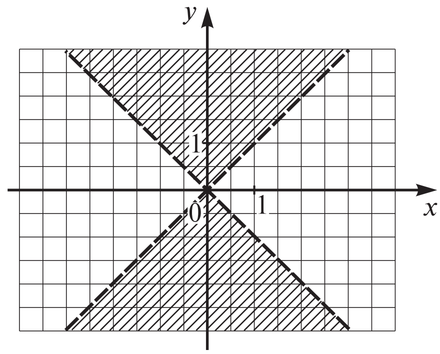


Рис.3

№ 302.

а) Изобразим на координатной плоскости множество решений неравенства: $(x - y)(x + y) < 0$.

$$(x-y)(x+y)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-x \end{array}\right.$$

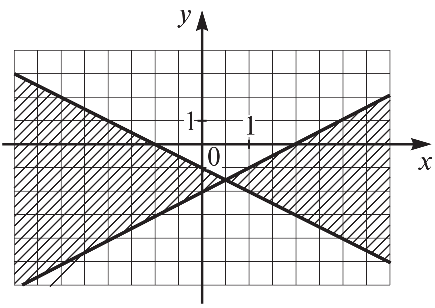


Искомое множество точек — пара вертикальных углов, образованных прямыми $y = x$ и $y = -x$, не включая эти прямые.

б) Изобразим на координатной плоскости множества решений неравенства:

$(x + y + 1)(x - y - 2) \geqslant 0$.

$$(x+y+1)(x-y-2)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} y=-x-1 \\ y=x-2 \end{array}\right.$$



Искомое множество точек — пара вертикальных углов, образованных прямыми $y = -x - 1$ и $y = x - 2$, включая эти прямые.

№ 303.

а) Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству: $x^2 + y^2 > 1$.

Решению неравенства будут удовлетворять все точки, лежащие во внешней части круга с центром в точке (0; 0) и радиусом 1 (рис.1).

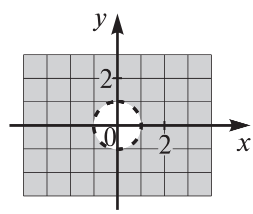


Рис. 1

б) Изобразим на координатной плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют неравенству:

$x^2 + y^2 > 2x - 2y$

Преобразуем неравенство:

$x^2 + y^2 > 2x - 2y \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 2y > 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y + 1)^2 > 2$

Решению неравенства будут удовлетворять все точки, лежащие во внешней части круга с центром в точке (1; –1) и радиусом $\sqrt{2}$ (рис.2)

в)* Решением неравенства: $(|x| - 3)^2 + (|y| - 4)^2 \leqslant \leqslant 4 = 2^2$ будут четыре круга (с границей) радиуса 2 с центрами в точках (3; 4), (3; –4), (–3; 4), (–3;–4) — рис.3.

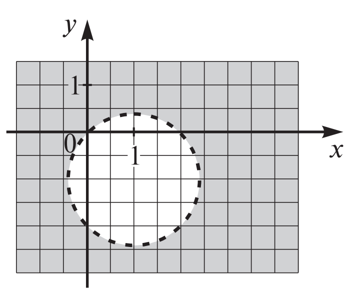


Рис. 2

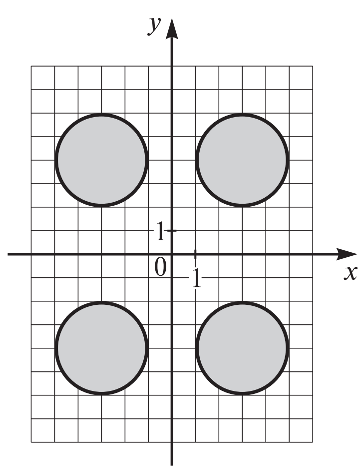
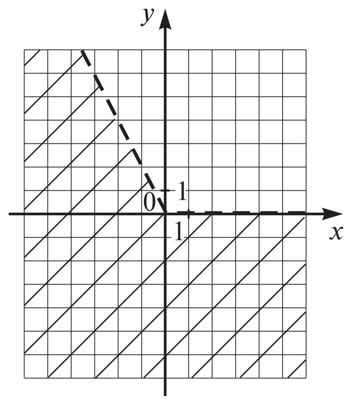


Рис. 3

№ 304.



Изобразим на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяютнеравенству: $x + y < |x|$.

Раскроем модуль. При $x \geqslant 0$ получим $y < 0$; при $x < 0$ получим $y < -2x$.

Искомое множество — внешняя часть тупого угла, где границы этого угла не являются решением данного неравенства.

Из **раздела для повторения** укажем примеры решения к заданиям, выполнение которых рекомендуется. Учитель может выбрать и другие задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от выявленных у учащихся затруднений.

№ 307.

Это задание готовит учащихся к изучению следующей темы.

а) $7x^2 - 2x \neq 0 \Leftrightarrow x\,(7x - 2) \neq 0$

$x \neq 0$ и $7x - 2 \neq 0$

$$x \neq \frac{2}{7}$$

x может принимать все значения кроме 0 и $\frac{2}{7}$.

б) $n^2 - 6n + 8 \neq 0 \Leftrightarrow (n - 4)\,(n - 2) \neq 0 \Leftrightarrow n \neq 4$ и $n \neq 2$

n может принимать все значения кроме 2 и 4.

№ 308.

Это задание готовит учащихся к изучению следующей темы.

а) $|a| - 4 \neq 0 \Leftrightarrow |a| \neq 4$

a может принимать все значения кроме -4 и 4.

б) $4 - |3m - 5| \neq 0$

$$m \neq 3 \text{ и } m \neq \frac{1}{3}$$

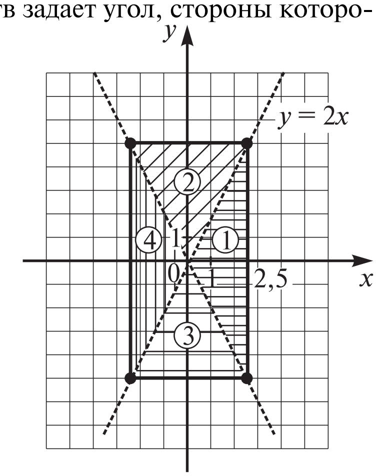
m может принимать все значения кроме $\frac{1}{3}$ и 3.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 321.*

Разберем 4 случая раскрытия модулей.

1) $2x + y \geqslant 0$, $2x - y \geqslant 0$ (эта система неравенств задает угол, стороны которого — лучи $y = -2x$, $x \geqslant 0$ и $y = 2x$, $x \geqslant 0$).



Тогда $(2x + y) + (2x - y) \leqslant 10$, откуда $4x \leqslant 10$, то есть $x \leqslant 2{,}5$.

2) $2x + y \geqslant 0$, $2x - y < 0$.

Тогда $(2x + y) - (2x - y) \leqslant 10$, откуда $2y \leqslant 10$, то есть $y \leqslant 5$.

3) $2x + y < 0$, $2x - y \geqslant 0$.

Тогда $-(2x + y) + (2x - y) \leqslant 10$, откуда $-2y \leqslant 10$, то есть $y \geqslant -5$.

4) $2x + y < 0$, $2x - y < 0$.

Тогда $-(2x + y) - (2x - y) \leqslant 10$, откуда $-4x \leqslant 10$, то есть $x \geqslant -2{,}5$.

Изобразим полученные части множества (см. рис.).

Таким образом, площадь искомого множества равна площади прямоугольника со сторонами 5 и 10, то есть 50.

Ответ: 50.

П. 2.1.2. Общее понятие функции. Область определения и множество значений функции

Основные содержательные цели.

1) Уточнить общее понятие функции, понятие графика числовой функции, понятие области определения и понятие множества значений функции.

2) Закрепить умение находить область определения и множество значений функции.

3) Повторить понятие конечного и бесконечного множеств. Тренировать умение строить график уравнения. Закрепить умение решать системы линейных неравенств с одним неизвестным.

Для **самостоятельного открытия** понятия графика функции рекомендуется выполнить № 322.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 323.

Чтобы найти область определения функции $y=\dfrac{x}{\sqrt{3x^2+4x+1}}$, укажем значения, которые может принимать аргумент.

Учащиеся знают, что знаменатель дроби не может быть равен нулю, а также определение арифметического квадратного корня, где подкоренное выражение может принимать только неотрицательные значения. Эти два понятия ограничивают область определения этой функции, значит, необходимо решить неравенство:

$$3x^2+4x+1>0 \quad\Leftrightarrow\quad 3(x+1)\left(x+\frac{1}{3}\right)>0 \quad\Leftrightarrow\quad x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{3};+\infty\right).$$

Значит, $D(y)=(-\infty;-1)\cup\left(-\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

№ 324.

Найдем область определения функции $y=\sqrt{11-2|x|}+\dfrac{4}{\sqrt{15-2x-x^2}}$.

Областью определения функции $y=\sqrt{11-2|x|}+\dfrac{4}{\sqrt{15-2x-x^2}}$ является множество тех значений аргумента, при которых подкоренное выражение $11-2|x|$ неотрицательно и подкоренное выражение $15-2x-x^2$ из знаменателя дроби положительно, значит, состоит из значений x, удовлетворяющей системе неравенств:

$$\begin{cases}11-2|x|\geqslant 0\\ 15-2x-x^2>0\end{cases}\qquad\begin{cases}-5{,}5\leqslant x\leqslant 5{,}5\\ (x-3)(x+5)<0\end{cases}$$

Решая эту систему, находим $D(y)=(-5;\,3)$.

№ 325.

а) Функция $y=\dfrac{x^2-4}{x+2}$ имеет смысл для всех $x\neq-2$, поэтому $D(y)=(-\infty;-2)\cup$ $\cup\,(-2;+\infty)$.

Для построения графика преобразуем функцию, выполнив сокращение на $x + 2$, получим: $y = x - 2$.

Построим график линейной функции с выколотой точкой. Для её построения найдём координаты двух точек, принадлежащей прямой $y = x - 2$.

x	0	1
y	–2	–1

Построим прямую и «выколем» точку, которая не принадлежит прямой. Координаты этой точки (–2; –4).

б) Функция $y = \frac{x^2 - x - 20}{x - 5}$ имеет смысл для всех $x \neq 5$, поэтому $D(y) = (-\infty; 5) \cup (5; +\infty)$.

Для построения необходимо функцию преобразовать. Графиком функции является прямая $y = x + 4$ с «выколотой» точкой, которая не принадлежит прямой, с координатами (5; 9).

в) Функция $y = 2 \cdot \frac{5x^2 - 2x}{5x^3 - 2x^2}$ имеет $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; 0,4) \cup (0,4; +\infty)$.

Для построения графика необходимо функцию преобразовать. Графиком функции является гипербола $y = \frac{2}{x}$ с «выколотой» точкой, координаты которой (0,4; 5).

г) Функция $y = -\frac{2x^2 - x^3}{x - 2}$ имеет $D(y) = (-\infty; 2) \cup (2; +\infty)$.

Графиком функции является парабола $y = x^2$ с «выколотой» точкой, координаты которой (2; 4).

№ 326.

Для того, чтобы указать целые значения переменных, входящих в область определения функции $y = \sqrt{9 - x^2} + \sqrt{\frac{1}{x - 2}}$, необходимо найти область определения.

Чтобы найти область определения данной функции, укажем значения, которые может принимать аргумент.

Подкоренное выражение может принимать только неотрицательные значения, знаменатель дроби не может быть равен нулю. Эти два понятия ограничивают область определения этой функции, значит, необходимо решить систему неравенств: $\begin{cases} 9 - x^2 \geqslant 0 \\ \frac{1}{x - 2} > 0 \end{cases}$, которая равносильна системе:

$$\begin{cases} (x - 3)(3 + x) \geqslant 0 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$$

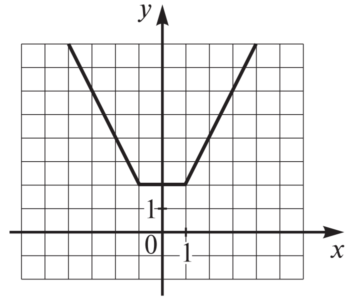
Найдем решение первого неравенства, это отрезок [– 3; 3]. Решением второго неравенства является интервал $(2; +\infty)$. В области определения запишем пересечение двух промежутков: $D(y) = (2; 3]$. В найденной области определения функции только число 3 является целым значением.

№ 327.

Найдём множество значений функции $y = |x + 1| + |x - 1|$.

Область допустимых значений переменной x, а значит и область определения данной функции — вся числовая ось. Множество значений функции легче определяется не с помощью формулы, а исходя из ее графика.

Разобьем числовую ось на промежутки, где знаки выражений под знаком модуля определены однозначно: $(-\infty; -1) \cup [-1; 1) \cup \cup [1; +\infty)$. Раскроем знак модуля, исходя из знака выражения на каждом из полученных промежутков.



При $x \geqslant 1$ имеем: $y = x + 1 + x - 1 = 2x$;

при $-1 \leqslant x < 1$ имеем: $y = x + 1 - (x - 1) = 2$;

при $x < -1$ имеем: $y = -(x + 1) - (x - 1) = -2x$.

Построим график полученной кусочно-линейной функции.

$$y = \begin{cases} 2x, \text{ если } x \geqslant 1, \\ 2, \text{ если } -1 \leqslant x < 1, \\ -2x, \text{ если } x < -1. \end{cases}$$

График ее состоит из трех «кусков» прямых линий — двух лучей и одного отрезка (см. рис.). В точке $x = 1$ функция принимает значение $y = 2$, в точке $x = -1$ функция принимает значение $y = 2$.

Из графика видно, что множеством значений функций является множество $[2; +\infty)$.

Ответ: $E(y) = [2; +\infty)$.

Учитывая возрастные особенности девятиклассников, рекомендуется дать возможность учащимся самостоятельно выбрать из **раздела для повторения** задание, которое по их мнению требуется разобрать.

Рассмотрим решение **нестандартных задач** данного пункта.

№ 339.*

Заметим, что $y = \dfrac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 5} = \dfrac{x^2 + 5 - 4x - 1}{x^2 + 5} = 1 - \dfrac{4x + 1}{x^2 + 5}$.

Поэтому отдельно найдем множество значений функции $g = \dfrac{4x+1}{x^2+5}$. Заметим, что знаменатель положителен при всех x. Найдем такие числа a, b, что при всех x выполняется неравенство $a \leqslant \dfrac{4x+1}{x^2+5} \leqslant b$, причем значения a, b достигаются при некоторых x. Отметим, что $a < 0$, $b > 0$.

Тогда $a \leqslant \dfrac{4x+1}{x^2+5} \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad a(x^2+5) \leqslant 4x+1 \leqslant b(x^2+5)$.

Рассмотрим правое неравенство.

$4x + 1 \leqslant b(x^2 + 5) \Leftrightarrow bx^2 - 4x + 5b - 1 \geqslant 0$ при всех x, причем значение 0 достигается.

Это означает, что дискриминант равен 0. Получим $\dfrac{D}{4} = 4 - (5b - 1)b = 0$, откуда $b = 1$ или $b = -\dfrac{4}{5}$. Но $b > 0$, поэтому $b = 1$ (получим неравенство $x^2 - 4x + 4 \geqslant 0$, которое обращается в равенство при $x = 2$).

Рассмотрим теперь левое неравенство.

$a(x^2 + 5) \leqslant 4x + 1 \quad \Leftrightarrow \quad ax^2 - 4x + 5a - 1 \leqslant 0$ при всех x, причем значение 0 достигается.

Это означает, что дискриминант равен 0. Получим $\dfrac{D}{4} = 4 - (5a - 1)a = 0$, откуда, учитывая что $a < 0$, получим $a = -\dfrac{4}{5}$ (получим неравенство $-\dfrac{4}{5}x^2 - 4x - 5 \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \Leftrightarrow \quad 4x^2 + 20x + 25 \geqslant 0$, которое обращается в равенство при $x = -2{,}5$).

Таким образом,

$$-\frac{4}{5}\leqslant\frac{4x+1}{x^2+5}\leqslant 1 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{4}{5}\geqslant-\frac{4x+1}{x^2+5}\geqslant -1 \quad\Leftrightarrow\quad 1+\frac{4}{5}\geqslant 1-\frac{4x+1}{x^2+5}\geqslant 1-1 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 1{,}8=\frac{9}{5}\geqslant\frac{x^2-4x+4}{x^2+5}\geqslant 0,$$

причем $y(2) = 0$, $y(-2{,}5) = 1{,}8$.

Ответ: [0; 1,8].

№ 340.*

Разобьем числа на пары: a и $c^2 - a$, b и $a^2 - b$, c и $b^2 - c$. В каждой паре сумма чисел положительна, поэтому в каждой паре не более одного отрицательного числа. Значит, всего отрицательных чисел не более трех. Три числа из шести могли оказаться отрицательными, например, если числа a, b, c отрицательны.

Ответ: 3 числа.

П. 2.1.3. Основные свойства функции

Основные содержательные цели.

1) Обобщить и систематизировать знания учащихся о следующих свойствах функции: нули функции; промежутки знакопостоянства; возрастание или убывание функции; наибольшее (наименьшее) значение функции.

2) Построить план исследования функции и сформировать умение его применять.

3) Закрепить умение решать задачи на подсчет вариантов, строить графики функций, решать системы неравенств.

Для **самостоятельного** проведения систематизации знаний о свойствах функции рекомендуется выполнить № 341 — № 343.

№ 342.

а) Для того, чтобы ответить на этот вопрос, необходимо по графику найти значения t, при которых $v = 0$, то есть $t = 0$, $t = 17$ и $t = 18$.

б) Если одно деление равно 1 минуте, то по графику пункт А отделяет от пункта Б 24 деления, а это 24 минуты.

в) 100 км/ч

г) По графику определяем.

Двигался: до 17 минуты, с 19 минуты по 24 минуту;

Стоял: с 17 минуты по19 минуту.

д) Скорость увеличивалась: с 0 по 8 минуту; с 19 по 21 минуту.

Скорость уменьшалась: с 11 по17 минуту; с 21 по 22 минуту; с 23 минуты по 24 минуту.

Скорость постоянная: с 8 минуты по 11 минуту; с 22 минуты по 23 минуту.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 344.

Для того, чтобы определить на каких промежутках из области определения функция $y = f(x)$ положительны, необходимо найти область определения функции и решить на ней неравенство $f(x) > 0$.

а) $D(y) = (-\infty; +\infty)$

$2x + 15 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x \in (-3;5)$.

Ответ: $x \in (-3;5)$.

б) Найдём область определения, для этого необходимо решить неравенство $x^2 - 5 \geqslant 0$.

$(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5}) \geqslant 0$, значит, $D(y)=\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

Функция $y=\sqrt{x^2-5}$ положительна на всей области определения кроме нулей функции.

Ответ: $x\in\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$.

в) $D(y) = (-\infty;1) \cup (1;+\infty)$.

Для того, чтобы определить на каких промежутках из области определения функция $y=\dfrac{x^3(x-2)^2}{x-1}$ положительна, необходимо решить неравенство:

$\dfrac{x^3(x-2)^2}{x-1}>0$.

Решая неравенство методом интервалов получим:

$x \in (-\infty;\ 0) \cup (1;2) \cup (2;+\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty;\ 0) \cup (1;2) \cup (2;+\infty)$.

г) $D(y) = (-\infty;\ +\infty)$.

Для того, чтобы определить на каких промежутках из области определения функция $y = x - 1 + 2|x|$ положительна, нужно решить неравенство:

$x - 1 + 2|x| > 0$.

Решим неравенство по известному нам алгоритму решения неравенств со знаком модуля.

1) Под знаком модуля выражение x.

2) Найдем корень уравнения $x = 0$.

3) Числовая прямая разбивается на два промежутка $(-\infty;\ 0) \cup [0;+\infty)$.

4) Решим неравенство, раскрыв модуль на промежутке $(-\infty;\ 0)$:

$x - 1 - 2x > 0 \Leftrightarrow x < -1$;

Решим неравенство, раскрыв модуль на промежутке $[0;\ +\infty)$:

$x-1+2x>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>\dfrac{1}{3}$.

5) Найдем пересечение каждого промежутка и соответствующего ему множества решений:

$(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

Ответ: $x\in(-\infty;-1)\cup\left(\dfrac{1}{3};+\infty\right)$.

№ 345.

а) Это утверждение верно.

Будем считать, что функции $f(x)$ и $g(x)$ убывают на все числовой оси. То есть для любых x_1, x_2, $x_1 < x_2$ выполняются неравенства $f(x_1) > f(x_2)$, $g(x_1) > g(x_2)$. Но тогда $f(x_1) + g(x_1) > f(x_2) + g(x_2)$, что означает, что сумма функций $f(x)$ и $g(x)$ также будет убывающей функцией.

б, в) Эти утверждения неверны.

Пусть $f(x) = 2x$ и $g(x) = x$ — возрастающие на всей числовой оси функции. Однако их разность $f(x) - g(x) = 2x - x = x$ не является убывающей функцией, а их произведение $f(x) \cdot g(x) = 2x \cdot x = 2x^2$ не является возрастающей на всей числовой оси функцией.

№ 346.

а) График функции $y = 4x + 11 - x^2$ парабола. Ветви направлены вниз.

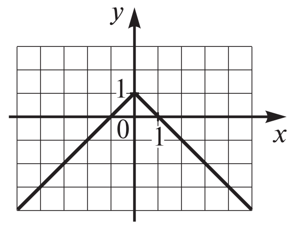
$D(y) = (-\infty;\ +\infty)$

Для того, чтобы определить на каком промежутке из области определения функция возрастает, необходимо найти вершину параболы.

$x_в = \dfrac{-b}{2a}$, $x_в = 2$.

Так как ветви параболы направлены вниз, функция возрастает при $x \in (-\infty; 2]$.

б) График функции $y = 1 - \sqrt{x^2}$ имеет областью определения всю числовую прямую.



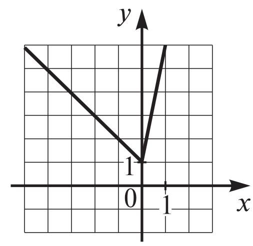
$D(y) = (-\infty; +\infty)$

Упростим функцию $y = 1 - \sqrt{x^2} = 1 - |x|$. Необходимо построить график функции, содержащей модуль. Учащиеся еще не владеют способом построения этого графика с помощью сдвига, поэтому пока учащиеся переходят к разветвленной форме записи:

$$y = \begin{cases} 1 - x, \text{ если } x \geqslant 0 \\ 1 + x, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Функция возрастает на промежутке $x \in (-\infty; 0]$.

в) График функции $y = 2x + 1 + 3|x|$ имеет областью определения всю числовую прямую.



$D(y) = (-\infty; +\infty)$.

Необходимо построить график функции, содержащей модуль. Перейдем к разветвленной форме записи:

$$y = \begin{cases} 5x + 1, \text{ если } x \geqslant 0 \\ -x + 1, \text{ если } x < 0. \end{cases}$$

Функция возрастает на промежутке $x \in [0; +\infty)$.

Учитывая возрастные особенности девятиклассников, рекомендуется дать им возможность самостоятельно выбрать из **раздела для повторения** задание, которое по их мнению требуется разобрать.

Рассмотрим решение **нестандартных задач** данного пункта.

№ 363.*

Если $a < 0$, то функция будет квадратичной с отрицательным старшим коэффициентом, и она принимает отрицательные значения. Значит, такие a не подходят.

Если $a = 0$, то функция будет линейной ($y = 2x$), и она также она принимает отрицательные значения. Значит, $a = 0$ не подходит.

Если $a > 0$, то функция будет квадратичной с положительным старшим коэффициентом. Эта квадратичная функция будет положительной на всей области определения, если она не будет иметь корней. То есть дискриминант будет отрицательным.

$\dfrac{D}{4} = 1 - 5a \cdot a < 0$. Откуда $a^2 > \dfrac{1}{5}$. Учитывая, что $a > 0$, получаем ответ: $a > \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $a > \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

№ 364.*

Первое решение. Вынесем из каждой скобки множитель, равный первому слагаемому в этой скобке. Тогда данное произведение примет вид

$$xyzt\left(1 + \frac{1}{xyzt}\right)^4.$$

Чётная степень ненулевого числа положительна, поэтому $\left(1 + \dfrac{1}{xyzt}\right)^4 > 0$. Разделив исходное неравенство на это число, получаем, что $xyzt > 0$.

Второе решение. Приведём сумму в каждой скобке к общему знаменателю:

$$\frac{xyzt+1}{yzt}\cdot\frac{xyzt+1}{ztx}\cdot\frac{xyzt+1}{txy}\cdot\frac{xyzt+1}{xyz}=\frac{(xyzt+1)^4}{(xyzt)^3}.$$

Из положительности этой дроби следует положительность знаменателя, то есть положительность искомого произведения.

П. 2.1.4*. Еще о свойствах функции

Основные содержательные цели.

1) Сформировать понятие четной, нечетной функции, уточнив имеющиеся у учащихся представления.

2) Сформировать умение исследовать функцию на четность и нечетность.

3) Сформировать представление о периодической функции, об ограниченной функции.

4) Тренировать умение определять свойства функции. Закрепить умение строить график уравнения, решать уравнения и неравенства с модулем. Повторить способ решения вероятностных задач с применением геометрических и комбинаторных рассуждений.

Для **самостоятельного** уточнения понятий четной, нечетной функций, а также функции, не являющейся ни четной, ни нечетной, рекомендуется выполнить № 365. Для **самостоятельного** знакомства с понятием периодической функции рекомендуется выполнить № 366.

№ 365.

Учащиеся могут разбить графики на группы в зависимости от их свойств симметрии.

В первую группу включаются графики, симметричные относительно начала координат — а, д (нечетные функции).

Во вторую группу включаются графики, симметричные относительно оси Oy — г, е (четные функции).

В третью группу включаются графики б и в, не обладающие такими свойствами (график б имеет «выколотую» точку).

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 367.

а) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — четные функции, определенные на всей числовой оси. Это означает, что для любого x выполняется $f(-x)=f(x)$ и $g(-x)=g(x)$. Но тогда функция $h(x)=f(x)+g(x)$ также определена на всей числовой оси, и

$h(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=h(x)$.

Значит, $h(x)$ — четная функция, то есть утверждение верно.

б) Рассмотрим функции $f(x)=x^2$ (четная функция) и $g(x)=x$ (нечетная функция) и их разность $h(x)=f(x)-g(x)=x^2-x$. Но тогда $h(1)=0\neq h(-1)=2$. Поэтому функция $h(x)$ не является четной.

в) Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — нечетные функции, определенные на всей числовой оси. Это означает, что для любого x выполняется $f(-x)=-f(x)$ и $g(-x)=-g(x)$. Но тогда функция $h(x)=f(x)\,g(x)$ также определена на всей числовой оси, и

$h(-x)=f(-x)\,g(-x)=(-f(x))(-g(x))=f(x)\,g(x)=h(x)$.

Значит, $h(x)$ — четная функция, то есть утверждение верно.

г) Пусть $f(x)$ — четная и $g(x)$ — нечетная функции, определенные на всей числовой оси. Это означает, что для любого x выполняется $f(-x)=f(x)$ и $g(-x)=-g(x)$. Но тогда функция $h(x)=f(x)\,g(x)$ также определена на всей числовой оси, и

$h(-x)=f(-x)\,g(-x)=f(x)(-g(x))=-f(x)\,g(x)=-h(x)$.

Значит, $h(x)$ — нечетная функция, то есть утверждение верно.

Ответ: а) верно; б) неверно; в) верно; г) верно.

№ 368.

а) Функция $y(x)$ определена на множестве $(-\infty;-1) \cup (-1;+\infty)$. Это множество не симметрично относительно нуля. Значит, $y(x)$ ни четная, ни нечетная.

Также можно было заметить, что, например $y(2)=10\frac{1}{3}$, $y(-2) = -11$. Значит, $y(-2) \neq y(2)$ и $y(-2) \neq -y(2)$. Поэтому $y(x)$ ни четная, ни нечетная.

б) Функция $y(x)$ определена на множестве $(-\infty;+\infty)$. Это множество симметрично относительно нуля. При этом $y(-x) = 3(-x)^4 - 2|-x| = 3x^4 - 2|x| = y(x)$ для любого x. Значит, $y(x)$ четная.

в) Функция $y=x\cdot\sqrt{x^2-5}$ определена при $x^2 - 5 \geqslant 0$, то есть на множестве $\left(-\infty;-\sqrt{5}\right]\cup\left[\sqrt{5};+\infty\right)$. Это множество симметрично относительно нуля. При этом $y(-x)=(-x)\cdot\sqrt{(-x)^2-5}=-x\cdot\sqrt{x^2-5}=-y(x)$ для любого x. Значит, $y(x)$ нечетная.

г) Функция $y=\frac{x^2}{|x|-5}$ определена при $|x| - 5 \neq 0$, то есть на множестве $(-\infty;-5) \cup (-5;5) \cup (5;+\infty)$. Это множество симметрично относительно нуля. При этом $y(-x)=\frac{(-x)^2}{|-x|-5}=\frac{x^2}{|x|-5}=y(x)$ для любого x. Значит, $y(x)$ четная.

Ответ: а) ни четная, ни нечетная; б) четная; в) нечетная; г) четная.

№ 369.

Докажем, что утверждения а-в верны.

Пусть функция ограничена, то есть ее множество значений содержится в отрезке $[a; b]$. Заметим, что найдется отрезок $[-M; M]$, в котором содержится отрезок $[a; b]$. (Можно взять $M = |a| + |b|$.) Значит, множество значений функции содержится в отрезке $[-M; M]$.

Пусть теперь $y(x)$ и $g(x)$ — ограниченные функции. Тогда найдутся такие числа A, B, что $E(y) \subset [-A; A]$, $E(g) \subset [-B; B]$. То есть для любого x: $-A \leqslant y(x) \leqslant A, -B \leqslant g(x) \leqslant B$, что эквивалентно $|y(x)| \leqslant A$, $|g(x)| \leqslant B$.

а) Пусть $h(x) = y(x) + g(x)$. Тогда $|h(x)| = |y(x) + g(x)| \leqslant |y(x)| + |g(x)| \leqslant A + B$, что эквивалентно $-(A + B) \leqslant h(x) \leqslant A + B$. То есть $h(x)$ ограничена.

б) Пусть $h(x) = y(x) - g(x)$. Тогда $|h(x)| = |y(x) - g(x)| \leqslant |y(x)| + |g(x)| \leqslant A + B$, что эквивалентно $-(A + B) \leqslant h(x) \leqslant A + B$. То есть $h(x)$ ограничена.

в) Пусть $h(x) = y(x)g(x)$. Тогда $|h(x)| = |y(x) \cdot g(x)| \leqslant |y(x)| \cdot |g(x)| \leqslant A \cdot B$, что эквивалентно $-(A \cdot B) \leqslant h(x) \leqslant A \cdot B$. То есть $h(x)$ ограничена.

г) Пусть $y(x) = 1$, $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$. Функция $y(x)$, очевидно, ограничена. Функция $g(x)$ ограничена, так как $0<\frac{1}{x^2+1}\leqslant 1$. Однако их отношение $\frac{y(x)}{g(x)}=x^2+1$ — не является ограниченной функцией.

Также можно было взять $g(x) = 0$. Тогда отношение $\frac{y(x)}{g(x)}$ будет вообще не определено и не может являться ограниченной функцией.

Ответ: а) верно; б) верно; в) верно; г) не верно.

№ 370.

а) Функция $y = x^2 - 3x$ — квадратичная. Как мы знаем, она не является ограниченной, так как множество ее значений $[y_B; +\infty)$.

б) Заметим, что функция $y=\sqrt{1-x}+\sqrt{x}$ определена, если $1 - x \geqslant 0$ и $x \geqslant 0$, то есть при $x \in [0;1]$. Но для таких x выполняется $0 \leqslant \sqrt{1-x} \leqslant 1$ и $0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 1$. Значит, $0 \leqslant \sqrt{1-x}+\sqrt{x} \leqslant 2$ (на самом деле знаки неравенств будут строгие, так как если один корень равен 0, то другой равен 1, и наоборот, если один корень равен 1, то другой равен 0). Поэтому функция $y(x)$ ограничена.

Замечание. Можно точно найти наибольшее и наименьшее значения функции. На области определения оба корня принимают неотрицательные значения. Возведем равенство в квадрат: $y^2=1+2\sqrt{x-x^2}$. На отрезке [0;1] функция $x - x^2$ принимает значения от 0 до 0,25, поэтому y^2 — от 1 до 2, а y — от 1 до $\sqrt{2}$.

в) Заметим, что функция $y=\dfrac{1}{|x|+1}$ определена при всех x. Так как $|x| + 1 \geqslant 1 > 0$, то $0<\dfrac{1}{|x|+1} \leqslant 1$. Поэтому функция $y(x)$ ограничена.

Ответ: б, в.

№ 371.

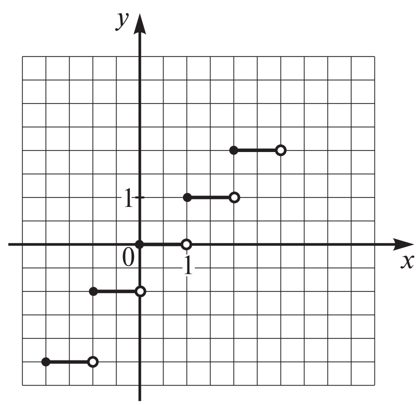
Заметим, что $\{a + 1\} = \{a\}$, так как 1 — период функции $y = \{x\}$.

Рассмотрим $f(x + T) = \{5(x + T) + 0,5\} = \{(5x + 0,5) + 5T\}$ Если $5T = 1$, то $f(x + T) = \{(5x + 0,5) + 5T\} = \{5x + 0,5 + 1\} = \{5x + 0,5\} = f(x)$. Значит, функция $f(x)$ периодическая, и ее период $T = 0,2$.

Ответ: $T = 0,2$.

№ 372.

График функции $y = [x]$ изображен на рисунке.



Функция $y = [x]$ не будет периодической, так как, например, значение 0 она принимает при $x \in [0;1)$ и не принимает это же значение ни при каких $x \geqslant 1$.

Ответ: не периодическая.

Учитывая возрастные особенности девятиклассников, учителю рекомендуется дать возможность учащимся самостоятельно выбрать из **раздела для повторения** задание, которое по их мнению требуется разобрать.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 388.*

Преобразуем неравенство:

$$x \geqslant \frac{1000}{x} \quad \Leftrightarrow \quad x-\frac{1000}{x} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x^2-1000}{x} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\left(x-\sqrt{1000}\right)\left(x+\sqrt{1000}\right)}{x} \geqslant 0.$$

Его решение: $x\in\left[-\sqrt{1000};0\right)\cup\left[\sqrt{1000};+\infty\right)$. Так как $31<\sqrt{1000}<32$, то наименьшее целое x, удовлетворяющее неравенству, это $x = -31$.

Ответ: –31.

№ 389.*

Заметим, что $\dfrac{x+1}{\sqrt{x\ \ +2x+a}}=\dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+a-1}}$. Поэтому если $a < 1$, то при $(x + 1)^2 = 1 - a > 0$ (то есть при $x=-1\pm\sqrt{1-a}$) знаменатель будет обращаться в ноль, а числитель будет отличен от нуля. Значит при $x=-1\pm\sqrt{1-a}$ функция не определена, а в окрестности этих точек модуль функции не ограничен.

Если $a = 1$, то $y=\dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2}}=\dfrac{x+1}{|x+1|}$, то есть принимает значение 1 при $x > -1$ и значение -1 при $x < -1$, значит, функция ограничена.

Если $a < 1$, то $|y|=\left|\dfrac{x+1}{\sqrt{(x+1)^2+a-1}}\right|<1$, так как $|x+1|<\left|\sqrt{(x+1)^2+a-1}\right|$, значит, функция ограничена.

Таким образом, функция ограничена при $a \geqslant 1$.

Ответ: $a \geqslant 1$.

§ 2. Исследование функций и построение графиков

2.2.1.* Общий план построения графика функции

Основные содержательные цели.

1) Познакомить учащихся с аналитическим способом определения свойств функции и их применением для построения графика.

2) Сформулировать общий план построения графика функции и сформировать умение его применять.

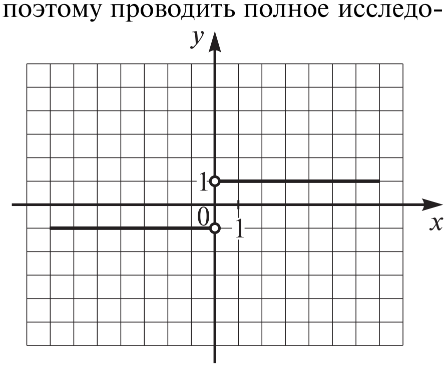
3) Закрепить умение выполнять преобразования выражений с корнями.

Для **самостоятельного построения** общего плана построения графика функции рекомендуется выполнить № 390 — № 391.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 392.

а) Функция $y=\dfrac{x}{|x|}$ достаточно простая, поэтому проводить полное исследование мы не будем.



Заметим, что функция определена при всех $x \neq 0$.

Если $x > 0$, то $y=\dfrac{x}{|x|}=\dfrac{x}{x}=1$.

Если $x < 0$, то $y=\dfrac{x}{|x|}=\dfrac{x}{-x}=-1$.

Теперь мы можем построить график функции.

б) Заметим, что $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}=\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}$,

поэтому функция определена при всех $x \neq \pm 1$. Функция $y=\dfrac{x-1}{(x-1)(x+1)}=\dfrac{1}{x+1}$,

значит, чтобы получить ее график достаточно построить график $y=\dfrac{1}{x+1}$ с помощью общего плана построения функции и «выколоть» на полученной кривой точку с абсциссой, равной 1.

Применим общий план построения графика для функции $y=\dfrac{1}{x+1}$.

1. Функция $y=\dfrac{1}{x+1}$ определена при $x \in (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$.

2. Область значений функции определять пока не будем.

3. Найдем точки пересечения графика с осями координат.

Уравнение $\frac{1}{x+1}=0$ не имеет корней, значит, функция не имеет точек пересечения с осью *Ox*.

Найдем значение функции $f(0)$: $y(0)=\frac{1}{0+1}=1$. Значит, функция пересекает ось *Oy* в точке (1; 0).

Найдем интервалы знакопостоянства функции:

$$\frac{1}{x+1}>0 \quad \Leftrightarrow \quad x+1>0 \quad \Leftrightarrow \quad x>-1$$

$$\frac{1}{x+1}<0 \quad \Leftrightarrow \quad x+1<0 \quad \Leftrightarrow \quad x<-1$$

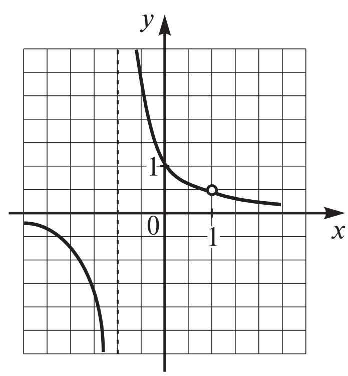
Значит, $f(x) > 0$ при $x \in (-1; +\infty)$ и $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -1)$.

4. $D(y) = (-\infty; -1) \cup (-1; +\infty)$ не симметрична относительно нуля. Значит, функция не является ни четной, ни нечетной.

5. Функция $y=\frac{1}{x+1}$ не периодическая.

6. Знаменатель $x + 1$ обращается в ноль в точке $x = -1$, а числитель дроби равен 1 (при $x = -1$). При этом знаменатель дроби $x + 1 > 0$ при $x > -1$ и $x + 1 < 0$ при $x < -1$. Поэтому при стремлении x к -1 при $x > -1$ значения $f(x)$ неограниченно увеличиваются, при стремлении x к -1 при $x < -1$ значения $f(x)$ неограниченно уменьшаются. График имеет вертикальную асимптоту $x = -1$.

7. При неограниченном росте x значение $\frac{1}{x+1}$ неограниченно приближается к нулю. График имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$ (ось абсцисс).



8. На основании этих данных можно, не вычисляя значения функции в конкретных точках, построить эскиз графика функции. Он изображен на рисунке.

9. Видно, что функция убывает на луче $(-\infty; -1)$ и $(-1; +\infty)$.

Докажем это.

Действительно, пусть $x_1 < x_2 < -1$.

Тогда $x_1 < x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1+1 < x_2+1 < 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x_1+1} > \frac{1}{x_2+1}$.

То есть, если $x_1 < x_2 < -1$, то $f(x_1) > f(x_2)$.

Значит, функция убывает на луче $(-\infty; -1)$.

Аналогично доказывается, что функция убывает на луче $(-1; +\infty)$.

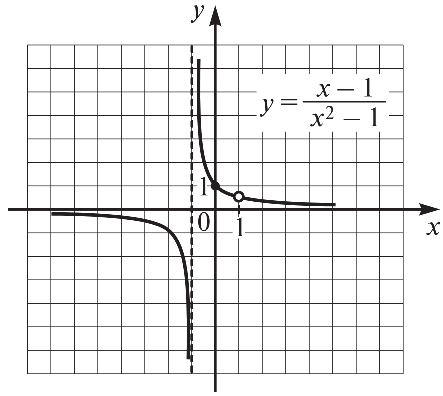
Найдем значения в некоторых точках при $x \in (-1; +\infty)$:

x	$-0,5$	0	0,5	1	2
y	2	1	$\frac{2}{3}$	0,5	$\frac{1}{3}$

Найдем значения в некоторых точках при $x \in (-\infty; -1)$:

x	$-1,5$	-2	$-2,5$	-3	-4
y	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	$-0,5$	$-\frac{1}{3}$

10. Теперь мы можем построить график функции $y=\dfrac{1}{x+1}$. «Выколов» на нем точку $(0;1)$ мы получим график функции $y=\dfrac{x-1}{x^2-1}$.



в) Применим общий план построения графика функции $y=\dfrac{1}{x^2+1}$.

1. Функция определена при всех x, то есть $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

2. Область значений функции определять пока не будем.

3. Легко видеть, что значение $f(x)$ никогда не обращается в нуль (график не имеет общих точек с осью абсцисс), а $f(0)=1$, поэтому график пересекает ось ординат в точке $(0;1)$.

Заметим, что $x^2+1>0$, а знак $f(x)$ совпадает со знаком знаменателя, поэтому $f(x)>0$ при $x\in(-\infty;+\infty)$.

4. Функция четна (для всех $x\in D(f)$ выполняется равенство $f(-x)=\dfrac{1}{(-x)^2+1}=\dfrac{1}{x^2+1}=f(x)$); значит, график симметричен относительно оси ординат, и достаточно построить только часть графика при $x\geqslant 0$; далее применить симметрию относительно оси ординат.

5. Функция $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ не периодическая.

Действительно, пусть $\exists T>0:\ \forall x\to f(x+T)=f(x)$. Взяв значение $x=0$, получим $f(T)=f(0)=1$. Однако если $x\neq 0$, то выполняется неравенство $\dfrac{1}{x^2+1}<1$. Получили противоречие.

6. Так как знаменатель x^2+1 нигде не обращается в нуль, то нет точек, при стремлении к которым $y=\dfrac{1}{x^2+1}$ неограниченно растет. График не имеет вертикальных асимптот.

7. Так как функция x^2, а вместе с ней и x^2+1, неограниченно растет при стремлении x к бесконечности, то обратная положительная величина неограниченно приближается к нулю, другими словами при неограниченном росте x значение $\dfrac{1}{x^2+1}$ неограниченно приближается к нулю. График имеет горизонтальную асимптоту $y=0$ (ось абсцисс).

8. На основании этих данных можно, не вычисляя значения функции в конкретных точках, построить эскиз графика функции. Он изображен на рисунке.

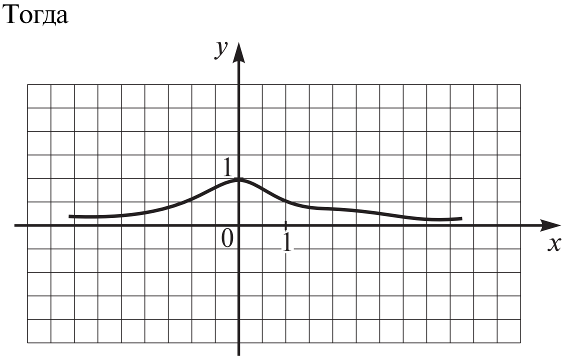
9. Видно, что функция убывает на луче $[0;+\infty)$. Покажем это.

Действительно, пусть $0\leqslant x_1<x_2$. Тогда

$$x_1^2<x_2^2 \iff x_1^2+1<x_2^2+1 \iff$$

$$\iff \frac{1}{x_1^2+1}>\frac{1}{x_2^2+1}.$$ То есть, если $x_1>x_2\geqslant 0$, то $f(x_1)>f(x_2)$. Значит, функция убывает на луче $[0;+\infty)$.

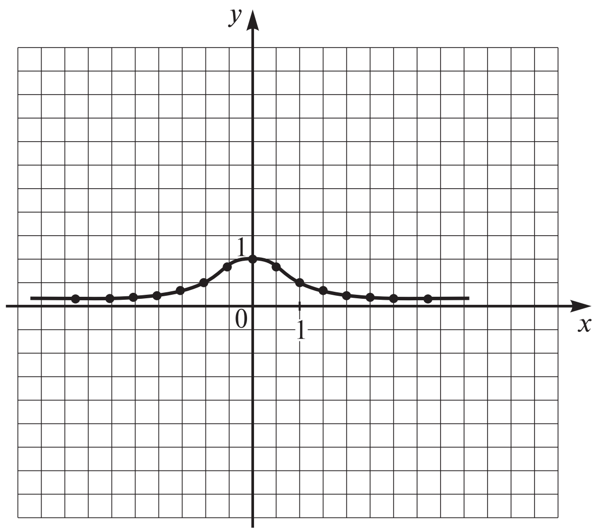
Из четности функции автоматически следует, что функция возрастает на луче $(-\infty;0)$.



Найдем (приближенно) значения в некоторых точках при $x \geqslant 0$.

x	0	0,5	1	1,5	2	2,5	3	3,5
y	1	0,8	0,5	0,31	0,2	0,14	0,1	0,08

10. Построим график функции.



г) Применим общий план построения графика функции $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$.

1. $y = \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{x}{(x-1)(x+1)}$. Функция определена при всех $x \neq 1$ и $x \neq -1$, то есть $D(f) = (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; +\infty)$.

2. Область значений функции определять пока не будем.

3. Легко видеть, что значение $f(x)$ обращается в нуль только при $x = 0$ ($f(0) = 0$), поэтому график пересекает ось ординат и ось абсцисс в точке (0; 0).

Решим неравенство $\dfrac{x}{(x-1)(x+1)} > 0$. Получим, что $f(x) > 0$ при $x \in (-1; 0) \cup$ $\cup (1; +\infty)$.

Аналогично, $f(x) < 0$ при $x \in (-\infty; -1) \cup (0; 1)$.

4. Функция нечетна (для всех $x \in D(f)$ выполняется равенство $f(-x) = \dfrac{-x}{(-x)^2 - 1} = \dfrac{-x}{x^2 - 1} = -f(x)$); значит, график симметричен относительно начала координат, и достаточно построить только часть графика при $x \geqslant 0$; далее применить симметрию относительно начала координат.

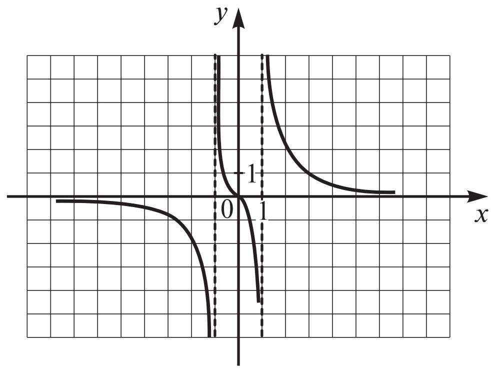
5. Функция $y = \dfrac{x}{x^2 - 1}$ не периодическая.

Действительно, пусть $\exists T > 0: \ \forall x \to f(x + T) = f(x)$. Взяв значение $x = 0$, получим $f(T) = f(0) = 0$. Однако функция обращается в ноль только при $x = 0$. Получили противоречие.

6. Знаменатель $x^2 - 1$ обращается в ноль в точках $x = 1$ и $x = -1$, а числитель дроби равен 1 (при $x = 1$) или -1 (при $x = -1$). При этом знаменатель дроби $x^2 - 1 > 0$ при $|x| > 0$ и $x^2 - 1 < 0$ при $|x| < 1$. Поэтому при стремлении x к 1 при $x > 1$ значения $f(x)$ неограниченно увеличиваются, при стремлении x к 1 при $x < 1$ значения $f(x)$ неограниченно уменьшаются, а при стремлении x к -1 при $x > -1$ значения $f(x)$ неограниченно увеличиваются, при стремлении x к -1 при $x < -1$ значения $f(x)$ неограниченно уменьшается. График имеет вертикальные асимптоты $x = 1$ и $x = -1$.

7. Заметим, что при $x > \sqrt{2}$ выполняется неравенство $0 < \frac{x}{x^2 - 1} < \frac{2}{x}$, так как при $x > \sqrt{2}$: $\frac{x}{x^2 - 1} < \frac{2}{x} \Leftrightarrow x^2 < 2x^2 - 2 \Leftrightarrow 2 < x^2$. Так как при неограниченном росте x значение $\frac{2}{x}$ неограниченно приближается к нулю, то это же имеет место и для меньшего выражения $f(x)$, то есть график неограниченно приближается в горизонтальной прямой $y = 0$ (оси абсцисс). В силу нечетности функции это же имеет место при неограниченном росте по модулю отрицательных значений x, т.е. график имеет горизонтальную асимптоту $y = 0$.

8. На основании этих данных можно, не вычисляя значения функции в конкретных точках, построить эскиз графика функции. Он изображен на рисунке.



9. Видно, что функция убывает на полуинтервале [0;1) и на луче (1;+∞). Покажем это.

Действительно, пусть $0 \leqslant x_1 < x_2 < 1$. Так как $x_1^2 - 1 < 0$ и $x_2^2 - 1 < 0$, то $\frac{x_1}{x_1^2 - 1} > \frac{x_2}{x_2^2 - 1} \Leftrightarrow x_1(x_2^2 - 1) > x_2(x_1^2 - 1) \Leftrightarrow x_1x_2^2 - x_1 - x_2x_1^2 + x_2 > 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x_1x_2 + 1)(x_2 - x_1) > 0.$

Оба выражения в скобках положительны, поэтому если $0 \leqslant x_1 < x_2 < 1$, то $f(x_1) > f(x_2)$. Значит, функция убывает на полуинтервале [0;1).

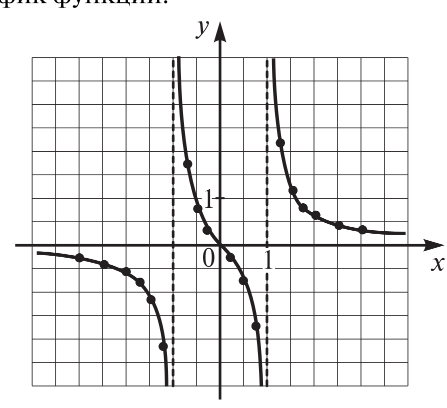
Аналогично показывается, что функция убывает на луче (1;+∞).

Из нечетности функции автоматически следует, что функция убывает на луче (–∞;–1), на интервале (–1;1) и на луче (1;+∞).

Найдем (приближенно) значения в некоторых точках при $x \geqslant 0$.

x	0	0,25	0,5	0,75	1,25	1,5	1,75	2	2,5	3
y	0	–0,27	–0,67	–1,71	2,22	1,2	0,85	0,67	0,48	0,38

10. Построим график функции.



Учитывая возрастные особенности девятиклассников, учителю рекомендуется дать возможность учащимся самостоятельно выбрать из **раздела для повторения** задание, которое по их мнению требуется разобрать.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 403.*

Заметим, что все члены последовательности положительны. При этом $a_{n+1}^2 = a_n^2 + 2 + \frac{1}{a_n^2} > a_n^2 + 2$.

Поэтому $a_{100}^2 > a_{99}^2 + 2 > a_{98}^2 + 2 \cdot 2 > ... > a_1^2 + 2 \cdot 99 = 199 > 196 = 14^2$. Поэтому $a_{100} > 14$.

П.2.2.2. Преобразования графиков функций

Основные содержательные цели.

1) Сформировать умение выполнять следующие преобразования графиков: параллельный перенос (сдвиг) графика вдоль осей координат, сжатие или растяжение графика относительно оси абсцисс.

2) Сформировать умение применять данные преобразования графиков для построения графиков функций вида $y = f(x - d) + h$, $y = kf(x)$, $y = f(kx)$ из графика $y = f(x)$.

3) Закрепить умение выполнять преобразования выражений с корнями.

Для **самостоятельного открытия** способа построения графиков функции вида $y = f(x - d) + h$ из графика $y = f(x)$ рекомендуется выполнить № 404. Для **самостоятельного открытия** способа построения графиков функций вида $y = kf(x)$, $y = f(kx)$ из графика $y = f(x)$ рекомендуется выполнить № 407.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 405.

а) Для того, чтобы построить график функции $y = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ необходимо преобразовать правую часть, воспользовавшись формулой $(a + b)^3$.

Получим $y = (x + 1)^3$.

Сдвинем график $y = x^3$ вдоль оси абсцисс на 1 влево ($-1 < 0$).

б) Для того, чтобы построить график функции $y= x^3 + 3x^2 + 3x + 3$ необходимо преобразовать правую часть, выделив куб суммы.

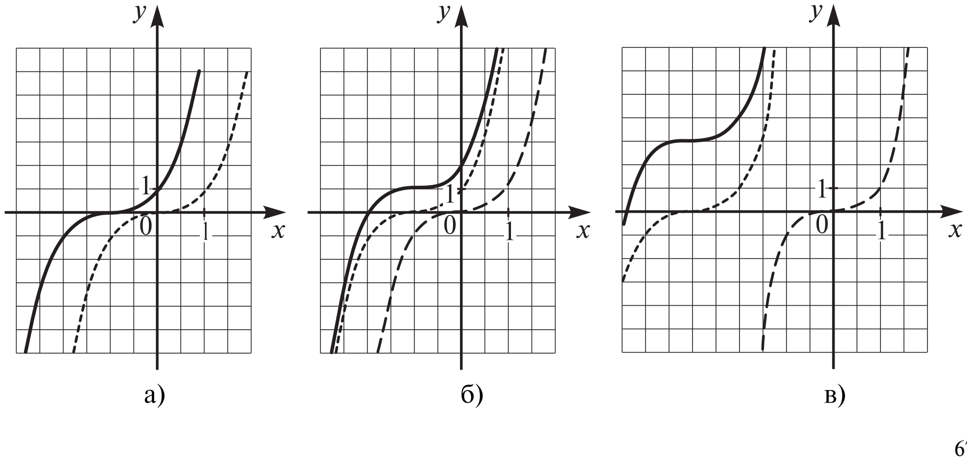
Получим $y = (x + 1)^3 + 2$

$y= x^3 \to y = (x + 1)^3 \to y = (x + 1)^3 + 2$. Сдвиг по оси абсцисс влево на 1 единицу и вверх по оси ординат на 2 единицы.

в) Для того, чтобы построить график функции $y = x^3 + 9x^2 + 27x + 30$ необходимо преобразовать правую часть, выделив куб суммы.

$y = x^3 + 3 \cdot 3 \cdot x^2 + 3 \cdot 3^2 \cdot x + 27 + 3 = (x + 3)^3 + 3$

$y = x^3 \to y = (x + 3)^3 \to y = (x + 3)^3 + 3$. Сдвиг по оси абсцисс влево на 3 единицы и вверх по оси ординат на 3 единичных отрезка.



а) б) в)

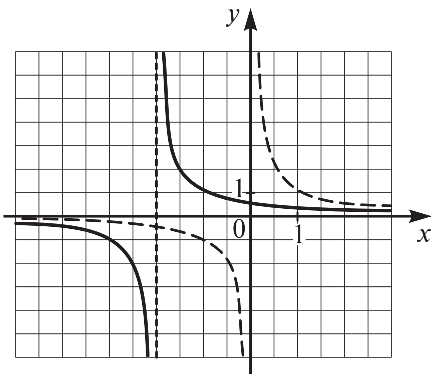
№ 406.

а) $y = \dfrac{1}{x} \to y = \dfrac{1}{x+2}$

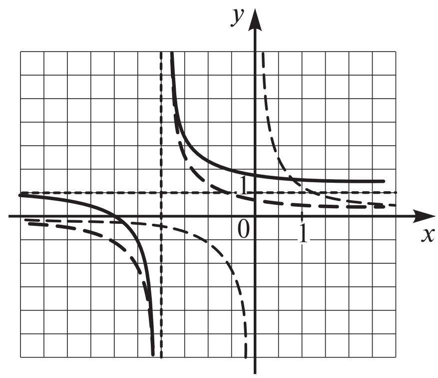
Строим график $y = \dfrac{1}{x+2}$ с помощью сдвига графика $y = \dfrac{1}{x}$ вдоль оси абсцисс на 2 единичных отрезка влево.

б) $y = \dfrac{1}{x} \to y = \dfrac{1}{x+2} \to y = \dfrac{1}{x+2} + 1$

Строим график $y = \dfrac{1}{x+2} + 1$ с помощью сдвига графика $y = \dfrac{1}{x}$ вдоль оси абсцисс на 2 единичных отрезка влево и вверх вдоль оси ординат на 1 единичный отрезок.



а)

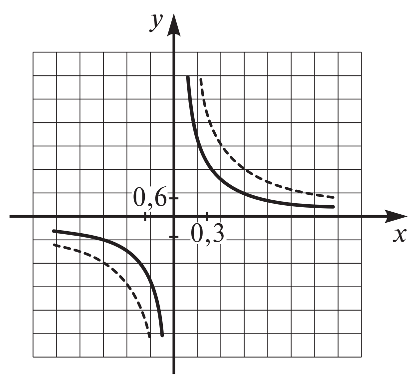


б)

№ 408.

1) Первый способ: сжатием графика к оси абсцисс в 2 раза, так как $y = \dfrac{1}{2} f(x) = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{x}$, $0 < k < 1$

2) Второй способ: сжатием к оси ординат в 2 раза, так как $y = f(2x) = \dfrac{1}{2 \cdot x}$, $k > 1$



Учитывая возрастные особенности девятиклассников, учителю рекомендуется дать возможность учащимся самостоятельно выбрать из **раздела для повторения** задание, которое по их мнению требуется разобрать.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 422.*

Среди чисел $x - y$, $x + y$, $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ не может быть ровно одного отрицательного, так как и произведение, и частное двух положительных чисел положительны. Тогда они все положительны и поэтому $x^2 + y^3 < 0$, и, поскольку $x^2 \geqslant 0$, то $y^3 < 0$ и $y < 0$. Наконец, $x = (x + y) - y > 0$.

Ответ: $x > 0$, $y < 0$.

П. 2.2.3.* График дробно-линейной функции

Основные содержательные цели.

1) Познакомить учащихся с дробно-линейной функцией и выявить ее свойства.

2) Вывести алгоритм построения графика дробно-линейной функции и сформировать умение его применять.

3) Тренировать умение выполнять преобразование графиков. Закрепить умение выполнять преобразования выражений с корнями, повторить понятие рационального и иррационального числа, закрепить умение использовать теорему Виета, закрепить умение решать рациональные уравнения. Повторить понятие модуля и закрепить умение решать уравнения со знаком модуля.

Для **самостоятельного открытия** способа построения графика дробно-линейной функции рекомендуется выполнить № 423.

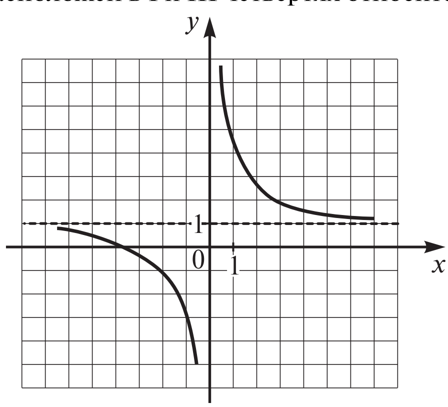
Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта:

№ 424.

а)

1) Имеем: $y=\frac{x+1}{x}=1+\frac{1}{x}$. Функция определена при $x \neq 0$, убывает на $(-\infty;0)$ и на $(0;+\infty)$. График функции получается из гиперболы $y=\frac{1}{x}$ параллельным переносом на 1 вверх по оси Oy (на вектор $(0;1)$) и имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$ и вертикальную асимптоту $x = 0$.

2) Для построения эскиза графика изобразим сначала асимптоты $y = 1$ и $x = 0$ и учтем, что график расположен в I и III четвертях относительно этих асимптот.

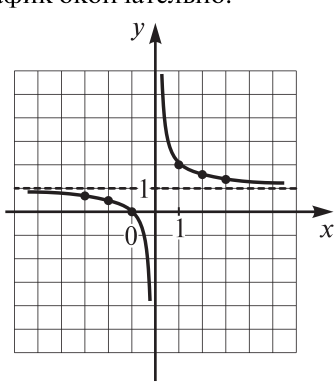


3) Если $y = 0$, то $x = -1$. График пересекает ось абсцисс в точке $(-1; 0)$. При $x = 0$ функция не определена

4) Найдем координаты дополнительных точек для каждой из двух ветвей гиперболы.

x	-3	-2	-1	1	2	3
y	$\frac{2}{3}$	0,5	0	2	1,5	$1\frac{1}{3}$

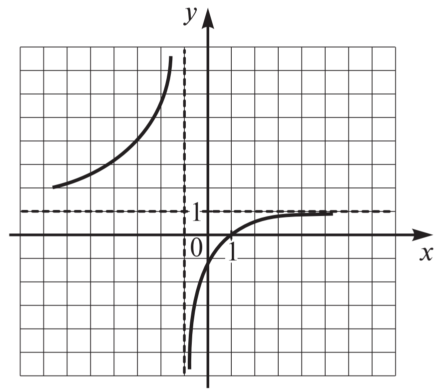
5) Построим теперь график окончательно.



б)

1) Имеем: $y=\dfrac{x}{x+1}=1-\dfrac{1}{x+1}$. Функция определена при $x \neq -1$, возрастает на $(-\infty;-1)$ и на $(-1;+\infty)$. График функции получается из гиперболы $y=-\dfrac{1}{x}$ параллельным переносом на один влево по оси Ox и на 1 вверх по оси Oy (на вектор $(-1;1)$) и имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$ и вертикальную асимптоту $x = -1$.

2) Для построения эскиза графика изобразим сначала асимптоты $y = 1$ и $x = -1$ и учтем, что график расположен во II и IV четвертях относительно этих асимптот.

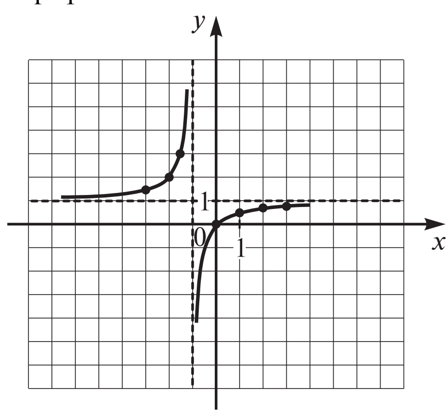


3) $y(0) = 0$. Начало координат лежит на графике.

4) Найдем координаты дополнительных точек для каждой из двух ветвей гиперболы.

x	-3	-2	0	1	2	3
y	1,5	2	0	0,5	$\dfrac{2}{3}$	0,75

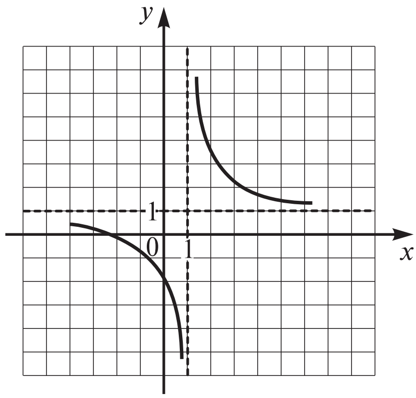
5) Построим теперь график окончательно.



в)

1) Имеем: $y=\dfrac{x+1}{x-1}=1+\dfrac{2}{x-1}$. Функция определена при $x \neq 1$, убывает на $(-\infty;1)$ и на $(1;+\infty)$. График функции получается из гиперболы $y=\dfrac{2}{x}$ параллельным переносом на 1 вправо по Ox и на 1 вверх по Oy (на вектор $(1;1)$) и имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$ и вертикальную асимптоту $x = 1$.

2) Для построения эскиза графика изобразим сначала асимптоты $y = 1$ и $x = 1$ и учтем, что график расположен в I и III четвертях относительно этих асимптот.



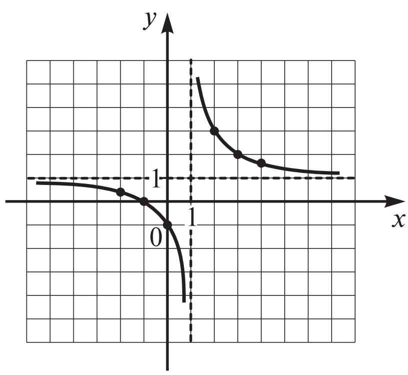
3) Если $y = 0$, то $x = -1$. График пересекает ось абсцисс в точке $(-1; 0)$.

$y(0) = -1$. График пересекает ось ординат в точке $(0; -1)$.

4) Найдем координаты дополнительных точек для каждой из двух ветвей гиперболы.

x	-2	-1	0	2	3	4
y	$\frac{1}{3}$	0	-1	3	2	$1\frac{2}{3}$

5) Построим теперь график окончательно.



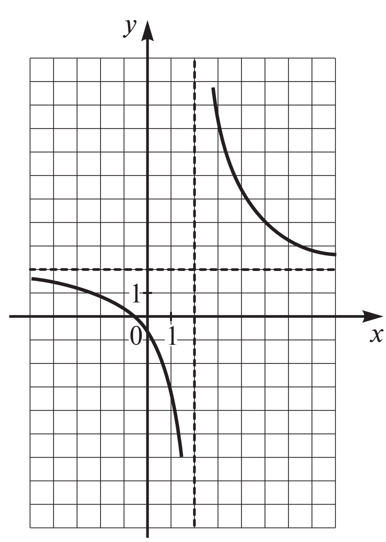
г)

1) Имеем: $y = \frac{2x+1}{x-2} = 2 + \frac{5}{x-2}$. Функция определена при $x \neq 2$, убывает на $(-\infty;2)$ и на $(2;+\infty)$. График функции получается из гиперболы $y = \frac{5}{x}$ параллельным переносом на 2 вправо по оси Ox и на 2 вверх по оси Oy (на вектор (2;2)) и имеет горизонтальную асимптоту $y = 2$ и вертикальную асимптоту $x = 2$.

2) Для построения эскиза графика изобразим сначала асимптоты $y = 2$ и $x = 2$ и учтем, что график расположен в I и III относительно этих асимптот.

3) Если $y = 0$, то $x = -0{,}5$. График пересекает ось абсцисс в точке $(-0{,}5; 0)$.

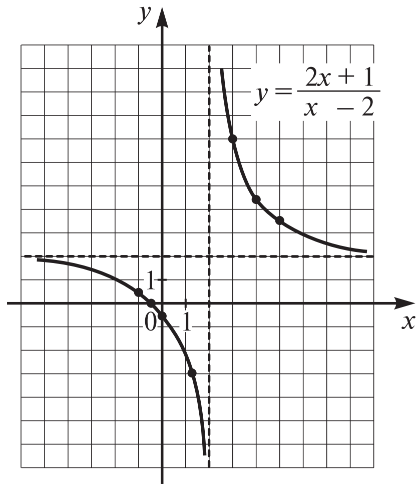
$y(0) = -0{,}5$. График пересекает ось ординат в точке $(0; -0{,}5)$.



4) Найдем координаты дополнительных точек для каждой из двух ветвей гиперболы.

x	-1	0	1	3	4	5
y	$\frac{1}{3}$	$-0{,}5$	-3	7	$4{,}5$	$3\frac{2}{3}$

5) Построим теперь график окончательно.

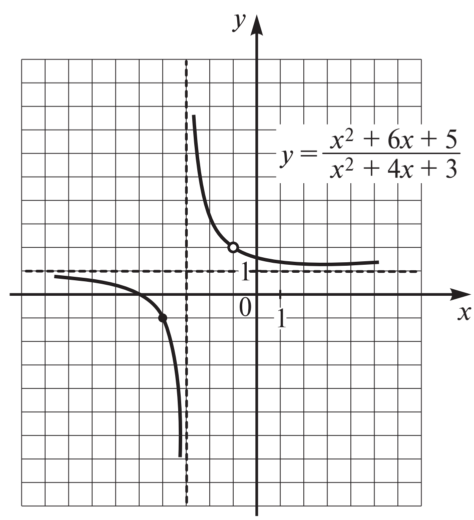


№ 425.

Заметим, что $y=\frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3}=\frac{(x+5)(x+1)}{(x+3)(x+1)}$. Значит, $y=\frac{x+5}{x+3}$ при $x \neq -1$. То есть график функции $y=\frac{x^2+6x+5}{x^2+4x+3}$ получается из графика $y=\frac{x+5}{x+3}$ «выкалыванием» точки $(-1; 2)$.

Построим график функции $y=\frac{x+5}{x+3}$.

Так как $y=\frac{x+5}{x+3}=1+\frac{2}{x+3}$, то данный график получается из гиперболы $y=\frac{2}{x}$ параллельным переносом на 3 вправо по Ox и на 1 вверх по Oy (на вектор $(-3;1)$) и имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$ и вертикальную асимптоту $x = -3$.



Если $y = 0$, то $x = -5$. График пересекает ось абсцисс в точке $(-5; 0)$.

$y(0)=1\frac{2}{3}$. График пересекает ось ординат в точке $\left(0;1\frac{2}{3}\right)$.

Найдем координаты дополнительных точек для каждой из двух ветвей гиперболы.

x	-6	-5	-4	-2	-1	0
y	$\frac{1}{3}$	0	-1	3	2	$1\frac{2}{3}$

Теперь построим теперь график исходной функции.

Учитывая возрастные особенности девятиклассников, учителю рекомендуется дать возможность учащимся самостоятельно выбрать из **раздела для повторения** задание, которое по их мнению требуется разобрать.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 435.*

Пусть изначально были числа x и y (с произведением xy). После того как первый множитель увеличили на 1, а второй уменьшили на 1, получилось $(x + 1)(y - 1) = xy + y - x - 1$. Произведение увеличилось на 2011, то есть $y - x - 1 = 2011$ или $y - x = 2012$. Если же первый множитель уменьшить на 1, а второй увеличить на 1, получится $(x + 1)(y - 1) = xy - y + x - 1$. Заметим, что $xy - y + x - 1 = xy - (y - x) - 1 = xy - 2012 - 1 = xy - 2013$. То есть произведение уменьшилось на 2013.

Ответ: уменьшится на 2013.

П.2.2.4. Преобразование графиков: симметрия относительно осей координат. График $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$.

Основные содержательные цели:

1) Сформировать умение выполнять следующие преобразования графиков: симметрия относительно осей координат.

2) Сформировать умение применять данные преобразования графиков для построения графиков функций вида $y = f(-x)$, $y = -f(x)$, $y = -f(-x)$ из графика $y = f(x)$.

3) Сформировать умение применять данные преобразования графиков для построения графиков функций вида $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$ из графика $y = f(x)$.*

4) Закрепить умение решать рациональные уравнения. Повторить понятие модуля.

Для **самостоятельного открытия** способа построения графиков $y = f(-x)$, $y = -f(x)$, $y = -f(-x)$ из графика $y = f(x)$ рекомендуется выполнить № 436. Для **самостоятельного открытия** способа построения графиков $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$ из графика $y = f(x)$ рекомендуется выполнить № 439.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта:

№ 437.

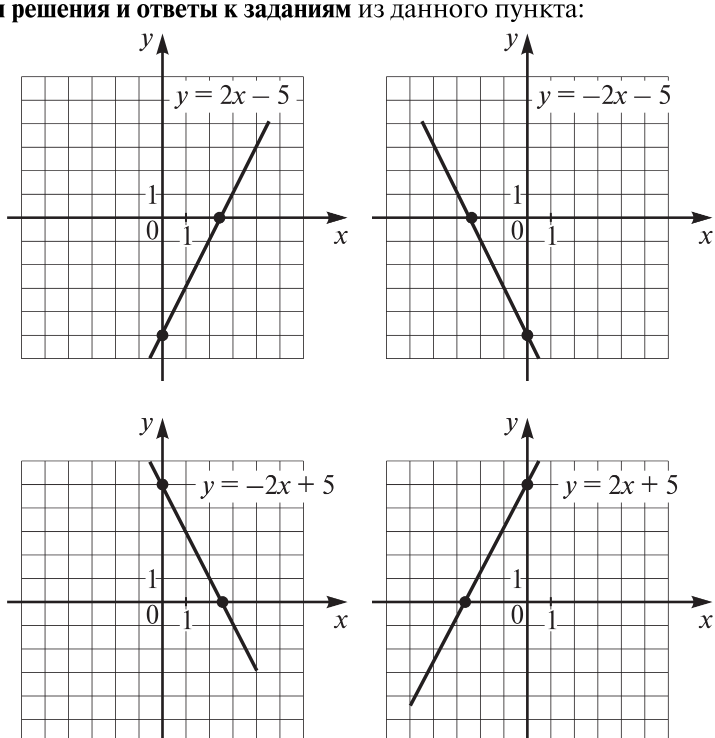
а) $f(x) = 2x - 5$

Для построения графиков функций $y = f(-x)$, $y = -f(x)$, $y = -f(-x)$ необходимо построить график $f(x) = 2x - 5$ и применить к нему следующие преобразования:

1. симметрию относительно оси ординат: $y = f(-x) = -2x - 5$;

2. симметрию относительно оси абсцисс: $y = -f(x) = -2x + 5$;

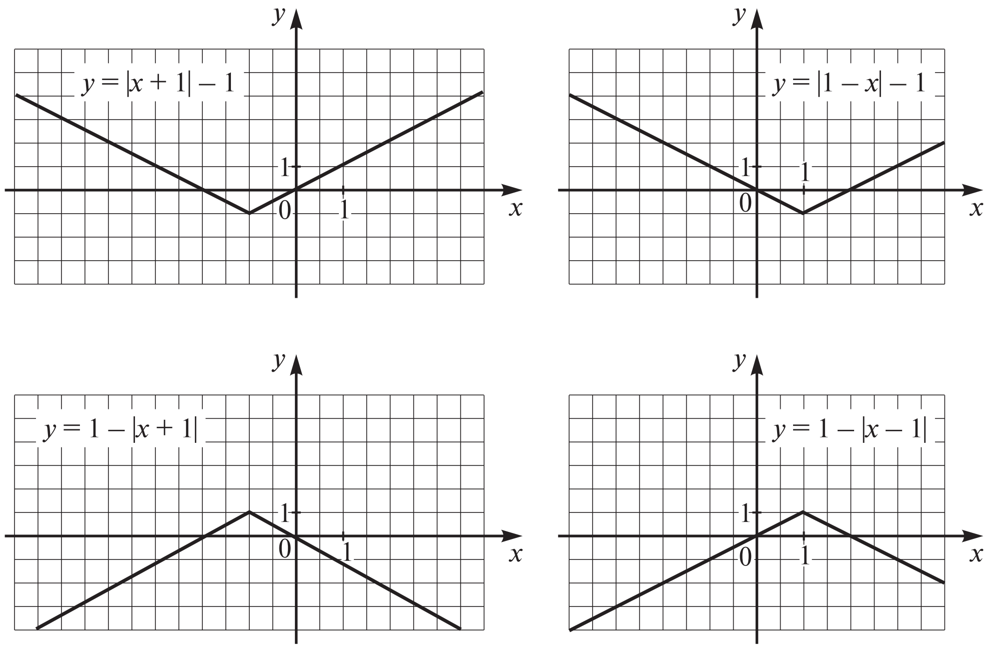
3. симметрию относительно начала координат: $y = -f(-x) = 2x + 5$.



б) $f(x) = |x + 1| - 1$

Для построения графиков функций $y = f(-x)$, $y = -f(x)$, $y = -f(-x)$ необходимо построить график функции $f(x) = |x + 1| - 1$ и применить к нему следующие преобразования:

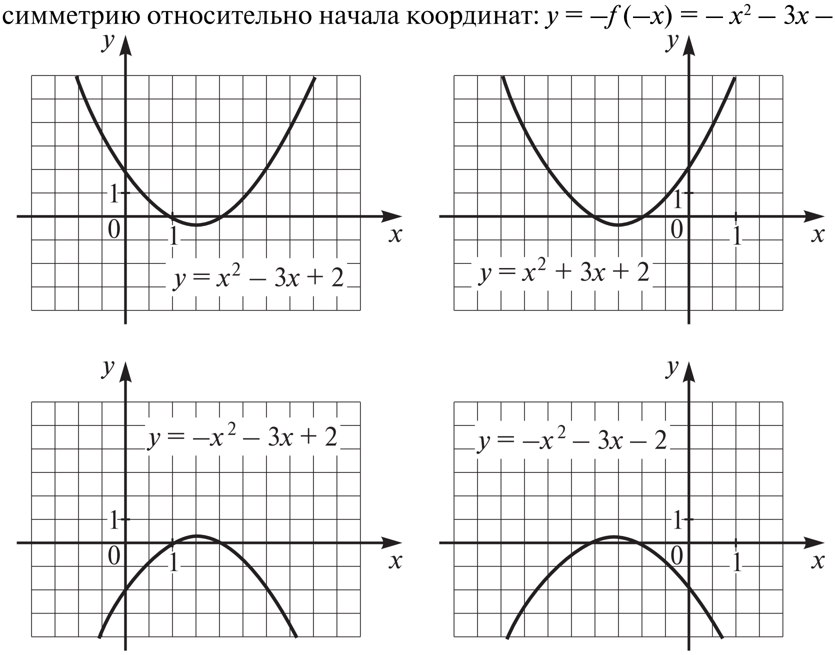
1. симметрию относительно оси ординат: $y = f(-x) = |1 - x| - 1$;
2. симметрию относительно оси абсцисс: $y = -f(x) = -(|x + 1| - 1) = 1 - |x + 1|$;
3. симметрию относительно начала координат: $y = -f(-x) = 1 - |1 - x|$.



в) $f(x) = x^2 - 3x + 2$

Для построения графиков функций $y = f(-x)$, $y = -f(x)$, $y = -f(-x)$ необходимо построить график $f(x) = x^2 - 3x + 2$ применить к нему следующие преобразования:

1. симметрию относительно оси ординат: $f(-x) = x^2 + 3x + 2$;
2. симметрию относительно оси абсцисс: $y = -f(x) = -x^2 + 3x - 2$;
3. симметрию относительно начала координат: $y = -f(-x) = -x^2 - 3x - 2$.



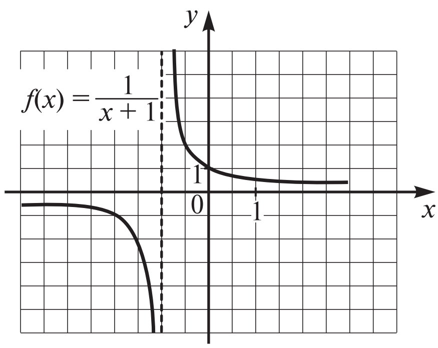
г) $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$

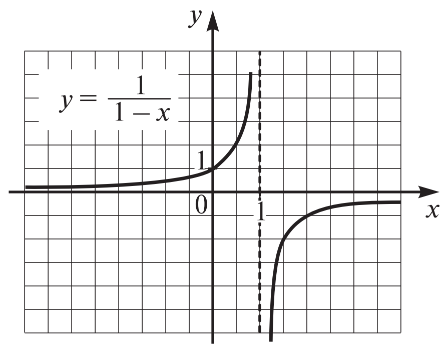
Для построения графиков функций $y=f(-x)$, $y=-f(x)$, $y=-f(-x)$ необходимо построит график $f(x)=\dfrac{1}{x+1}$ и применить к нему следующие преобразования:

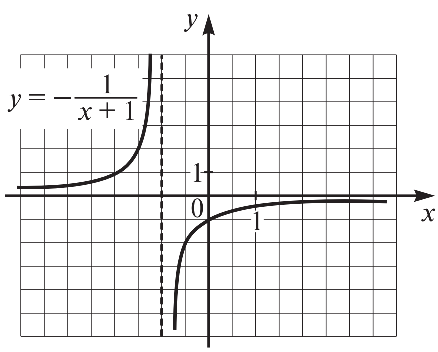
1. симметрию относительно оси ординат: $y=f(-x)=\dfrac{1}{1-x}$;

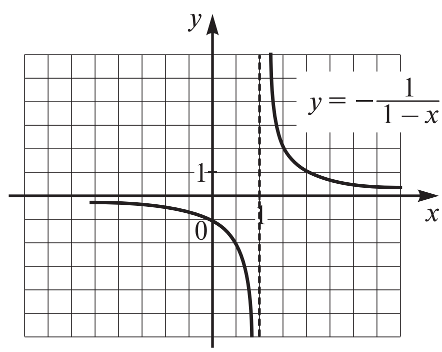
2. симметрию относительно оси абсцисс: $y=-f(x)=-\dfrac{1}{x+1}$;

3. симметрию относительно начала координат: $y=-f(-x)=-\dfrac{1}{1-x}$.









№ 438.

Из функций $y = 2x$, $y = |\,2x - 4\,|$, $y = 5x^2 - 14$, $y = |\,x^2 + 1|$, $y=\left|\dfrac{3}{x}\right|$, $y = 2|\,x\,| - 8$ необходимо выбрать функции вида $y = |\,f(x)\,|$.

Ими являются: $y = |\,2x - 4\,|$, $y = |\,x^2 + 1\,|$, $y=\left|\dfrac{3}{x}\right|$.

Найдем множество значений этих функций.

Если $y = |\,2x - 4\,|$, то $E(y) = [0;+\infty)$.

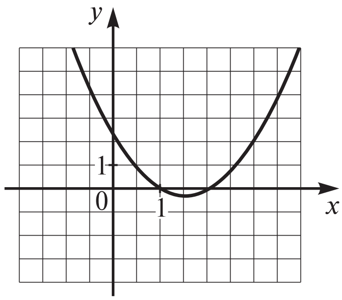
Если $y = |\,x^2 + 1\,|$, то $E(y) = [1;+\infty)$.

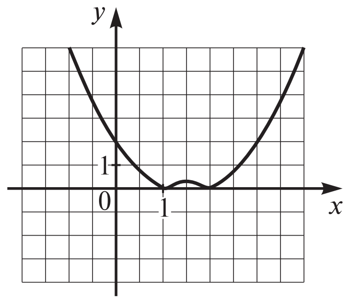
Если $y=\left|\dfrac{3}{x}\right|$, то $E(y) = (0;+\infty)$.

№ 440.

а) Применим к параболе $y = x^2 - 3x + 2 = (x - 1{,}5)^2 - 0{,}25$ преобразование $y = f(x) \to y = |\,f(x)\,|$.

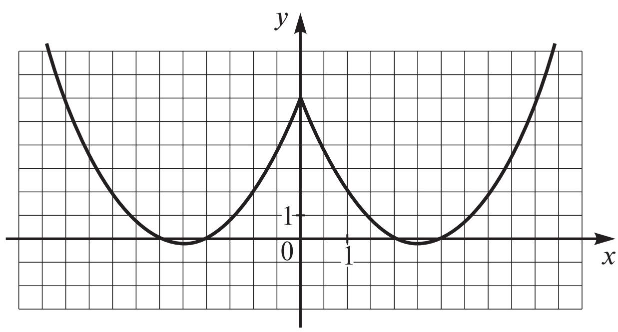
Область определения функции $x \in \boldsymbol{R}$. Область значений $E(y) = [0;+\infty)$. Функция равна нулю при $x = 2$ и $x = 1$, при этих значения достигается наименьшее значение функции. Наибольшее значение на отрезке [1;2] равно 0,25 при $x = 1{,}5$. Функция неотрицательна на всей области определения. Функция возрастает на [1; 1,5] и на [2; +∞), убывает на (–∞; 1] и на [1,5; 2].





б) Так как $x^2 = |x|^2$, достаточно применить к параболе $y = x^2 - 5x + 6$ преобразование $y = f(x) \to y = f(|x|)$.

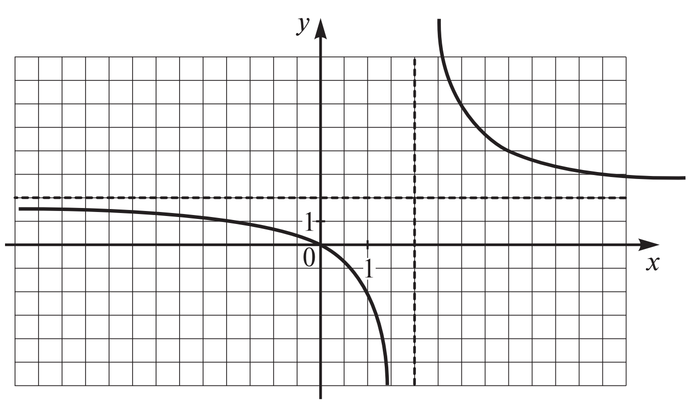
Область определения функции $x \in \boldsymbol{R}$. Область значений $E(y) = [-0{,}25;+\infty)$. Функция является четной. Функция равна нулю при $x = -3$, $x = -2$, $x = 2$ и $x = 3$ при этих значения достигается наименьшее значение функции. Наибольшее значение на отрезке [–3;3] равно 6 при $x = 0$. Функция возрастает на [–2,5; 0] и на [2,5; +∞), убывает на (–∞;–2,5] и на [0; 2,5].



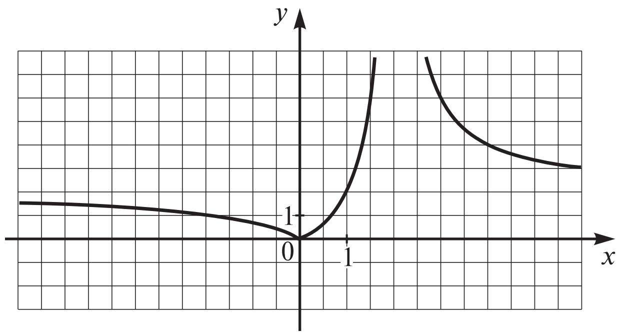
в) $y = \left|\dfrac{2x}{x-2}\right| = \left|2 + \dfrac{4}{x-2}\right|$.

Применим преобразование $y = \dfrac{4}{x} \to y = 2 + \dfrac{4}{x-2} \to y = \left|2 + \dfrac{4}{x-2}\right|$.

1) Сдвиг вдоль оси абсцисс вправо на 2 единицы и вверх вдоль оси ординат на 2 единицы функции $y = \dfrac{4}{x}$.

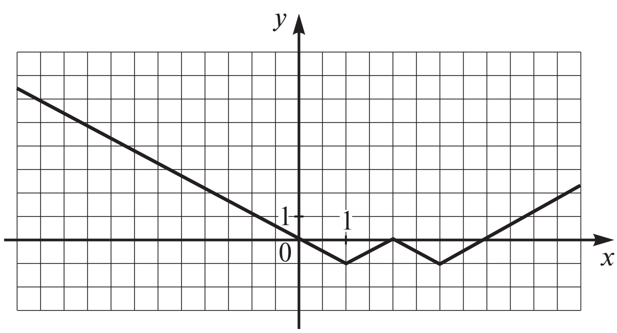


2) $y=\left|2+\dfrac{4}{x-2}\right|$. Применим преобразование $y = f(x) \to y = |f(x)|$.



г) Построим график функции $y = \| x - 2| - 1| - 1$.

Применим преобразование $y = | x - 2| \to y =| x - 2 | -1 \to y = \| x - 2 | -1| \to y =$ $= \| x - 2 | -1| -1$.

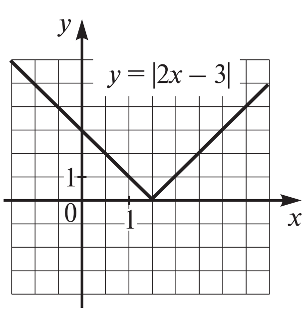


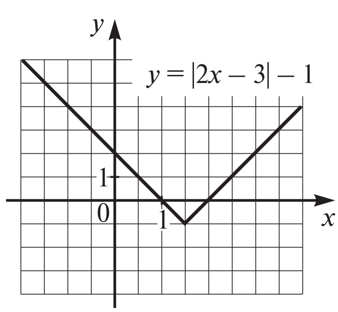
Область определения $x \in \boldsymbol{R}$. Область значений $E(y) = [-1;+\infty)$. Функция равна 0 при $x = 0$, при $x = 2$ и при $x = 4$. Наименьшее значение функции равно -1 и достигается при $x = 1$ и $x = 3$, наибольшее значение функции на отрезке [1;3] равно 0 при $x = 2$. Функция возрастает на [1; 2] и на [3; $+\infty$), убывает на ($-\infty$; 1] и на [2; 3].

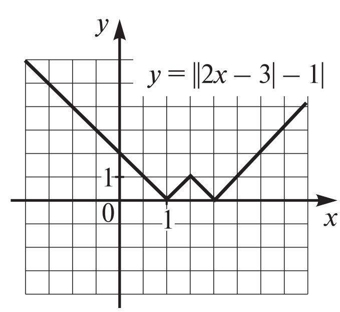
№ 441.

Построим график функции $y = \| 2x - 3 | -1|$.

Применим преобразование $y = | 2x - 3 | \to y =| 2x - 3 | -1 \to y = \| 2x - 3 | -1|$







Область определения $x \in \boldsymbol{R}$. Область значений $E(y) = [0; +\infty)$. Функция равна 0 при $x = 1$ и при $x = 2$. Наименьшее значение функции равно 0 и достигается при $x = 1$ и $x = 2$, наибольшее значение функции на отрезке [1; 2] равно 1 при $x = 1{,}5$. Функция неотрицательна на всей области определения. Функция возрастает на [1; 1,5] и на [2; $+\infty$), убывает на ($-\infty$; 1] и на [1,5; 2].

Решим уравнение $\| 2x - 3 | -1| = a$. Количество его решений будет совпадать с количеством точек пересечения функции $y = \| 2x - 3 | -1|$ и прямой $y = a$.

Уравнение не имеет решений, если $a < 0$;

Уравнение имеет два решения, если $a = 0$ и $a \in (1;+\infty)$;

Уравнение имеет 3 решения, если $a = 1$;

Уравнение имеет 4 решения, если $a \in (0;1)$.

Учитывая возрастные особенности девятиклассников, учителю рекомендуется дать возможность учащимся самостоятельно выбрать из **раздела для повторения** задание, которое по их мнению требуется разобрать.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 451.*

Решение.

Заметим, что данная функция четная, так как

$y(-x) = \left|\dfrac{(-x)^2 - 5|-x| + 6}{(-x)^2 - 6|-x| + 8}\right| = \left|\dfrac{x^2 - 5|x| + 6}{x^2 - 6|x| + 8}\right| = y(x)$. Поэтому построим график функции $y = \left|\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}\right|$ при $x \geqslant 0$ и отразим его симметрично относительно оси Oy.

Будем рассматривать только $x \geqslant 0$.

Теперь заметим, что $y = \left|\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}\right| = \left|\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x-4)}\right|$. Значит, $y = \left|\dfrac{x-3}{x-4}\right|$ при $x \neq 2$. То есть график функции $y = \left|\dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 6x + 8}\right|$ получается из графика $y = \left|\dfrac{x-3}{x-4}\right|$ «выкалыванием» точки (2; 0,5). Чтобы построить график $y = \left|\dfrac{x-3}{x-4}\right|$, нужно построить график $y = \dfrac{x-3}{x-4}$ и отразить относительно оси Ox его часть, лежащую ниже оси Ox.

$$y = \frac{x-3}{x-4} = 1 + \frac{1}{x-4}.$$

Так как $y = \dfrac{x-3}{x-4} = 1 + \dfrac{1}{x-4}$, то данный график получается из гиперболы $y = \dfrac{1}{x}$ параллельным переносом на вектор (4; 1) и имеет горизонтальную асимптоту $y = 1$ и вертикальную асимптоту $x = 4$.

Если $y = 0$, то $x = 3$. График пересекает ось абсцисс в точке (3; 0).

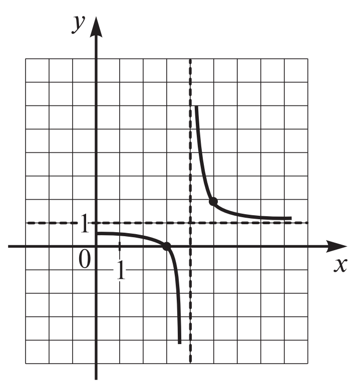
$y(0) = 0,75$. График пересекает ось ординат в точке (0; 0,75).

Найдем координаты дополнительных точек для каждой из двух ветвей гиперболы, расположенных при $x \geqslant 0$.

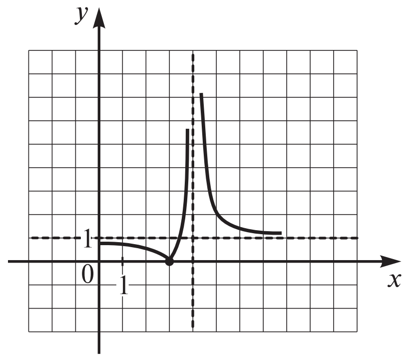
x	1	2	3	5	6	7
y	$\dfrac{2}{3}$	0,5	0	2	1,5	$1\dfrac{1}{3}$

Теперь построим графики:

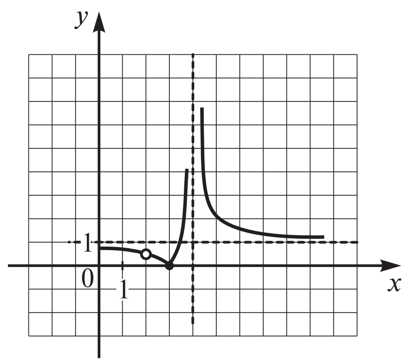
1) $y = \dfrac{x-3}{x-4}$ при $x \geqslant 0$.



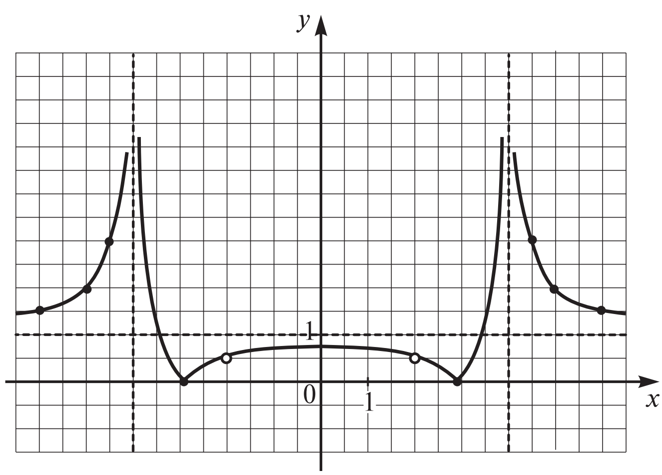
2) $y=\left|\dfrac{x-3}{x-4}\right|$ при $x \geqslant 0$.



3) $y=\left|\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-6x+8}\right|$ при $x \geqslant 0$.



4) Требуемый график $y=\left|\dfrac{x^2-5|x|+6}{x^2-6|x|+8}\right|$.



Глава 3. Числовые последовательности

Третья глава посвящена изучению числовых последовательностей, среди которых особое внимание уделяется изучению арифметической и геометрической прогрессий.

Особенностью курса «Учусь учиться» является то, что учащиеся неоднократно встречались с числовыми последовательностями при выполнении заданий на поиск закономерностей в ряду, в речевую практику учащихся вводились понятие последовательности, члена последовательности. При углубленном изучении курса эти понятия уже использовались при знакомстве со способом приближенного вычисления значения квадратного корня (8 класс) и методом математической индукции (9 класс). Таким образом, к моменту изучения данной главы у учащихся накоплен необходимый опыт работы с последовательностями.

В первом параграфе учащиеся уточняют свои представления о числовой последовательности, знакомятся с определением члена последовательности, первого члена последовательности, общего члена последовательности, уточняют смысл индексных обозначений. Учащиеся знакомятся со способами задания числовой последовательности, они учатся находить члены последовательности, заданной формулой n-го члена и заданной рекуррентно. В курсе вводится определение числовой последовательности, где она рассматривается как частный случай функции. С этим определением следует познакомить более подготовленных учащихся. При углубленном изучении курса учащиеся знакомятся со свойствами последовательностей: монотонностью и ограниченностью.

Во втором и третьем параграфах учащиеся знакомятся с арифметической и геометрической прогрессиями, как с особым видом числовых последовательностей. Они выводят формулу общего члена обеих прогрессий и учатся ее применять. Девятиклассники знакомятся с критериями арифметической и геометрической прогрессии, что существенно расширяет спектр рассматриваемых в курсе задач. Здесь же рассматривается формулы суммы n первых членов для обеих прогрессий. В общеобразовательном классе требовать от всех учащихся умения выводить формулы суммы не следует. При углубленном изучении курса учащиеся знакомятся с дополнительными свойствами и признаками прогрессий, а также с формулой суммы для бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Изучая последний пункт третьего параграфа, девятиклассники получают представление о линейных рекуррентных соотношениях, частным случаем которых являются изученные ими прогрессии.

Отметим, что изучение арифметической и геометрической прогрессий дает возможность показать учащимся прикладное значение математики. Поэтому знакомство с арифметической и геометрической прогрессиями происходит на конкретных практических задачах, изученные формулы также применяются для решения ряда задач практического содержания.

Характеристика деятельности учащихся

При изучении содержания третьей главы учащиеся:

• *применяют* изученные способы действий для решения задач в типовых и поисковых ситуациях;

• *обосновывают* правильность выполненного действия с помощью обращения к общему алгоритму, определению, свойству, формуле;

• *строят математическую модель* текстовых задач, переводя их условие на язык алгебры.

• *записывают* способы действий с помощью алгоритмов, выбирают алгоритм и используют его для выполнения различных задач;

• *сопоставляют* способы задания последовательностей и переходят от одного способа к другому;

• *исследуют* последовательности на монотонность различными способами;

• *доказывают* ограниченность последовательностей, используя определение;

• *выводят формулы* для решения нового типа задач;

• *применяют известную формулу* для вывода новой формулы;

• *применяют* метод математической индукции при выводе ряда формул;

• *применяют* формулы общего члена, формулы суммы n первых членов арифметической и геометрических прогрессий при решении задач;

• *применяют полученные знания* для решения задач практической направленности.

Особенности изучения учебного содержания

При изучении третьей главы планированием предусмотрены уроки ОНЗ, структура которых обеспечивает выполнение учащимися целого комплекса универсальных учебных действий. Рассмотрим способ организации урока ОНЗ на примере содержания пункта 3.1.1. «Последовательности. Способы задания последовательностей.».

В этом пункте учащиеся уточняют свои представления о числовой последовательности, знакомятся с определением члена последовательности, первого члена последовательности, общего члена последовательности, уточняют смысл индексных обозначений. Учащиеся знакомятся со способами задания числовой последовательности, они учатся находить члены последовательности, заданной формулой n-го члена и заданной рекуррентно.

Урок открытия новых знаний выстраивается в соответствии с требованиями технологии деятельностного метода Л. Г. Петерсон (см. раздел «Приложение»). На этапе мотивации учитель может предложить учащимся обсудить эпиграф к этому пункту. Далее учитель сообщает, что тема, которую они начнут изучать с сегодняшнего урока, пригодится им в жизненных ситуациях. Так, новые знания, полученные учащимися, они смогут применить, например, для расчета суммы кредита.

После чего учитель организует актуализацию нужных для открытия знаний с помощью выполнения заданий (№ 464 — № 465). Далее учащимся следует разъяснить смысл понятия бесконечной числовой последовательности, познакомить с понятием члена последовательности, первого члена последовательности, общего члена последовательности, уточнить смысл индексных обозначений (при этом учащиеся работают с последовательностями, заданными словесно или перечислением). Для **самостоятельного открытия** аналитического способа задания последовательностей (рекуррентного способа и с помощью формулы общего члена) рекомендуется использовать задание № 466.

Рассмотрим пример *структуры открытия нового знания.*

1. Новое знание: аналитический способ задания последовательностей (рекуррентной формулой и формулой общего члена)

2. Актуализация.

Актуализировать опыт работы с рядами чисел.

Уточнить: представления о бесконечной числовой последовательности, смысл индексных обозначений.

Ввести: понятие члена последовательности, первого члена последовательности, общего члена последовательности.

3. Задание на пробное действие.

Последовательность чисел задана перечислением первых ее членов.

y_n: 3, 9, 27,...

Укажите еще два способа, которыми можно задать эту последовательность.

4. Фиксация затруднения.

Я не могу указать, какими еще способами можно задать эту последовательность

Я не могу перечислить все способы.

Я не могу обосновать, что правильно указал способы.

5. Фиксация причины затруднения.

Не известны способы задания числовых последовательностей.

6. Цель учебной деятельности.

Выявить способы задания числовых последовательностей.

7. Фиксация нового знания.

Учащиеся должны выявить аналитический способ задания последовательностей (рекуррентной формулой и формулой общего члена).

Открыть новое знание учащиеся могут с использованием текста задания № 466.

На *этапе первичного закрепления* рекомендуется выполнить задания № 467 (а), № 468, № 470 (а), № 471 (а); для *самостоятельной работы* учащимся можно предложить № 467 (б), № 470 (б), 471 (б).

На *этапе включения в систему знаний* рекомендуется выполнить № 469, № 473 или № 474. После чего в более подготовленном классе рекомендуется организовать знакомство учащихся с числовой последовательностью, как с частным случаем функции (можно использовать для этого текст учебника).

В зависимости от уровня подготовленности класса на этапе *повторения* рекомендуется выполнить одно из заданий № 475 — № 478. На этапе *рефлексии* учащимся предлагается оценить процесс и результат своей работы на уроке.

Кроме урока открытия нового знания, основные структурные элементы которого рассмотрены выше, планированием предусмотрены и другие типы уроков: *уроки рефлексии тренировочного и коррекционного типа*, где учащиеся вырабатывают и закрепляют свое умение применять новые понятия и способы действий, учатся самостоятельно выявлять и исправлять свои ошибки, корректировать свою учебную деятельность.

В течение изучения третьей главы учащимся предлагается два экспресс-теста, которые можно использовать для урока рефлексии или в качестве домашней работы.

Планированием также предусмотрены и уроки *обучающего контроля*. Перед проведением контрольной работы рекомендуется провести урок рефлексии с использованием содержания соответствующего раздела «Задачи для самоконтроля».

§ 1. Последовательности и их общие свойства

П. 3.1.1. Последовательности. Способы задания последовательностей

Основные содержательные цели.

1) Уточнить представления учащихся о бесконечной числовой последовательности, об использовании индексных обозначений.

2) Сформировать понятие членов последовательности, общего члена последовательности.

3) Познакомить учащихся со способами задания последовательности: аналитическим (рекуррентной формулой или формулой общего члена), перечислением ее членов или словесным описанием.

4) Сформировать умение находить члены последовательности, заданной формулой n-го члена.

5) Сформировать умение находить члены последовательности, заданной рекуррентно.

6) Закрепить умение выполнять преобразования дробно-рациональных выражений.

Для **самостоятельного открытия** аналитического способа задания последовательности (рекуррентной формулой, формулой общего члена) рекомендуется выполнить № 464 — № 466.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 467.

в) Чтобы записать первые пять членов последовательности, состоящей из натуральных чисел, которые при делении на 7 дают в остатке 4, можно воспользоваться формулой деления с остатком.

(a_n): 4; 11; 18; 25; 32...

№ 468.

а) $a_1 = 5 - 1 = 4$; $a_2 = 3$; $a_3 = 2$; $a_4 = 1$.

б) $a_1 = \frac{1^2+1}{1} = 2$; $a_2 = \frac{5}{2}$; $a_3 = \frac{10}{3}$; $a_4 = \frac{17}{4}$.

№ 469.

а) 4 ($2^{10} = 1024$);

б) Не могут, так как если последняя цифра 0 или 5, то число делится на 5, а степени двойки на 5 не делятся.

№ 470.

а) Чтобы найти пятый член последовательности (a_n) достаточно вычислить все стоящие перед ним члены:

$a_2 = 2a_1 + 1 = 2 \cdot 2 + 1 = 5$, тогда $a_3 = 2a_2 + 1 = 2 \cdot 5 + 1 = 11$, $a_4 = 2a_3 + 1 = 2 \cdot 11 + 1 = 23$ и $a_5 = 2a_5 + 1 = 2 \cdot 23 + 1 = 47$

б) Пятый член последовательности (b_n) можно найти сразу: $b_5 = 4^5 = 1024$.

№ 471.

а) Узнаем, является ли число 36 членом последовательности $y_n = 7n + 1$. Для этого достаточно решить уравнение относительно n. Если получим, что n-натуральное число, то 36 является членом последовательности.

$36 = 7n + 1 \Leftrightarrow 7n = 35 \Leftrightarrow n = 5$; $5 \in N$; $y_5 = 36$.

б) Решим уравнение относительно n, получим $n = 5\frac{5}{7}$, $n \in N$. Значит, число 41 не является членом данной последовательности.

№ 472.

Чтобы найти является ли число 123456789 членом последовательности $a_{n+1} = 3a_n + 1$, решим уравнение относительно a_n, $a_n \in N$.

При решении $a_n = 41152262\frac{2}{3}$, $a_n \notin N$, число не является членом последовательности, так как в последовательности a_n все члены натуральные числа.

№ 473.

Для того, чтобы задать последовательность рекуррентно, необходимо найти первые члены данной последовательности. Первый член равен -3, каждый последующий получается из предыдущего умножением на -3. Опишем её: $a_1 = -3$; $a_2 = -3a_1$; $a_3 = -3a_2$;... $a_{n+1} = -3a_n$;....

Ясно, что для задания этой последовательности достаточно указать её первый член $a_1 = -3$, а каждый следующий член вычисляется по формуле: $a_{n+1} = -3a_n$.

№ 474.

Вначале найдем ежемесячные выплаты по кредиту: 12000 : 12 = 1000 рублей в месяц.

Ежемесячно в течение года задолженность будет уменьшаться на $12000 - 1000n$ (n- количество выплат).

Со второго месяца ежемесячно выплачивается процент по кредиту — 4% от суммы задолженности: $0{,}04(12000 - 1000n)$.

Отсюда получим формулу последовательности, которая образует ежемесячную выплату (возврат кредита и выплата процента по кредиту):

$a_{n+1} = 1000 + 0{,}04\,(12000 - 1000n)$.

Найдем выплату за каждый месяц:

$a_1 = 1000$; $a_2 = 1440$; $a_3 = 1400$; $a_4 = 1360$; $a_5 = 1320$; $a_6 = 1280$; $a_7 = 1240$; $a_8 = 1200$; $a_9 = 1160$; $a_{10} = 1120$; $a_{11} = 1080$; $a_{12} = 1040$.

Переплата составила: $440 + 400 + 360 + 320 + 280 + 240 + 200 + 160 + 120 + 80 + 40 = 2640$.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 485.*

Заметим, что $П(10m) = 0$, то есть по крайней мере каждое десятое из выписанных чисел равно 0. Отсюда следует, что в этом ряду может встретиться не более 9 записанных подряд чисел, отличных от 0. Покажем, что они могут быть последовательными натуральными. Такими числами будут, например, $П(11111) = 1$, $П(11112) = 2$, ..., $П(11119) = 9$.

Ответ: 9.

П. 3.1.2.* Свойства последовательностей: монотонность, ограниченность

Основные содержательные цели.

1) Сформировать понятие монотонных последовательностей и ограниченных последовательностей.

2) Сформировать умение исследовать на монотонность последовательности.

3) Сформировать умение *доказывать* ограниченность последовательностей, используя определение.

4) Тренировать умение находить члены последовательности, заданной формулой n-го члена. Закрепить умение делить многочлены в столбик.

Для **самостоятельного открытия** понятия возрастающей и убывающей последовательностей рекомендуется выполнить № 488. Выполнение № 487 готовит это открытие, актуализируя понятие возрастающих и убывающих функций.

Для **самостоятельного открытия** одного из способов исследования последовательности на монотонность (путем рассмотрения знака разности $x_{n+1} - x_n$) рекомендуется выполнить задание № 489. Выполнение задания № 486 актуализирует способ, аналогичный новому, он использовался учащимися в 8 классе при доказательстве неравенства (они рассматривали знак разности левой и правой частей неравенства).

№ 486.

а) $a^2 + 9b^2 \geqslant 6ab \Leftrightarrow a^2 + 9b^2 - 6ab \geqslant 0 \Leftrightarrow (a - 3b)^2 \geqslant 0$.

б) $\dfrac{(a-b)^2}{2} \leqslant a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 - 2ab + b^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant a^2 + b^2 + 2ab \Leftrightarrow 0 \leqslant (a+b)^2$.

№ 487.

Убывающая функция — а), возрастающая б).

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 490.

а) Заметим, что $x_n = \frac{n^2+2n}{(n+1)^2} = \frac{n^2+2n+1-1}{(n+1)^2} = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$. Так как последовательность $\frac{1}{(n+1)^2}$ строго убывает, то $x_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ строго возрастает.

б) Заметим, что $x_n > 0$. Чтобы исследовать последовательность с положительными членами на возрастание, можно рассмотреть отношение $\frac{x_{n+1}}{x_n}$ и сравнить его с единицей. Для рассматриваемой последовательности $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{(n+1)!}{2^{n+1}}\right) : \left(\frac{n!}{2^n}\right) = \frac{n+1}{2}$. При $n = 1$ выполняется равенство $\frac{n+1}{2} = 1$, а при $n > 1$ выполняется неравенство $\frac{n+1}{2} > 1$. Поэтому последовательность x_n нестрого возрастает. Также можно сказать, что последовательность x_n строго возрастает со 2 номера.

в) $x_n = \sqrt{n^2+2n} - n$.

Домножив на сопряженное, преобразуем выражение для x_n. Получим

$$x_n = \sqrt{n^2+2n} - n = \frac{\left(\sqrt{n^2+2n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \frac{\left(\sqrt{n^2+2n}\right)^2 - n^2}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}.$$

Разделим числитель и знаменатель на n. Получим $x_n = \frac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n} = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$.

Последовательность $\frac{2}{n}$ строго убывает. Значит, строго убывает и последовательность $\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1$. Но тогда $x_n = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$ строго возрастает.

Ответ: а) строго возрастает; б) нестрого возрастает, строго возрастает со 2 номера; в) строго возрастает.

№ 491.

а) Мы показали, что $x_n = 1 - \frac{1}{(n+1)^2}$ и строго возрастает. Но n — натуральное. Поэтому $\frac{3}{4} = 1 - \frac{1}{(1+1)^2} = x_1 \leqslant 1 - \frac{1}{(n+1)^2} < 1$. Значит, последовательность ограничена.

Конечно, последовательность $\frac{n^2+2n}{(n+1)^2}$ снизу сразу можно было ограничить нулем.

б) Мы показали, что для последовательности выполняется $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{2}$. То есть при $n > 3$ каждый последующий член последовательности более чем в 2 раза превосходит предыдущий. А так как все члены последовательности положительны, то последовательность неограниченна.

в) Мы показали, что $x_n = \frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$ и строго возрастает. Поэтому

$$\frac{2}{\sqrt{3}+1}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{1}}+1}=x_1\leqslant\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}<\frac{2}{\sqrt{1}+1}=1$$. Значит, последовательность ограничена.

Конечно, последовательность $\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}$ снизу сразу можно было ограничить нулем.

Ответ: ограничены а) и в).

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 492.*

Заметим, что все члены последовательности не меньше 1.

Докажем, что последовательность монотонно возрастает. Заметим, что $a_2=\sqrt{1+\sqrt{1}}=\sqrt{2}>1=a_1$.

Покажем, что если $a_n > a_{n-1}$, то $a_{n+1} > a_n$ Заметим, что $a_{n+1}^2=1+\sqrt{a_n}$, $a_n^2=1+\sqrt{a_{n-1}}$.

Рассмотрим разность $a_{n+1}^2-a_n^2=\left(1+\sqrt{a_n}\right)-\left(1+\sqrt{a_{n-1}}\right)=\sqrt{a_n}-\sqrt{a_{n-1}}>0$, так как $a_n > a_{n-1} \geqslant 1$. Тогда $a_{n+1}^2-a_n^2=\left(a_{n+1}-a_n\right)\left(a_{n+1}+a_n\right)>0$. Но $a_{n+1} + a_n > 0$. Значит, $a_{n+1} - a_n > 0$, что и требовалось.

Покажем теперь, что последовательность ограничена.

Очевидно, что $0 < a_n$.

Докажем, что $a_n < 2$. Доказательство проведем по индукции.

База индукции. При $n = 1$ $a_1 = 1 < 2$.

Шаг индукции. Пусть $a_n < 2$. Тогда $a_{n+1}=\sqrt{1+\sqrt{a_n}}<\sqrt{1+\sqrt{2}}<\sqrt{1+3}=2$, что и требовалось.

§ 2. Арифметическая прогрессия

П. 3.2.1. Арифметическая прогрессия. Формула общего члена

Основные содержательные цели.

1) Сформировать понятие арифметической прогрессии, ее разности.

2) Вывести формулу общего члена арифметической прогрессии и сформировать умение ее применять.

3) Познакомить учащихся со свойствами и признаками арифметической прогрессии.

4) Тренировать умение находить члены последовательности, заданной формулой n-го члена. Тренировать умение исследовать последовательности на ограниченность. Закрепить умение решать дробно-рациональные уравнения.

Для подготовки введения понятия арифметической прогрессии рекомендуется повторить способ решения задач на простой процентный рост (№ 500). Для введения понятия арифметической прогрессии, разности арифметической прогрессии и их первичного закрепления можно воспользоваться заданиями № 501 — № 502. Для **самостоятельного вывода** формулы общего члена арифметической прогрессии рекомендуется выполнить № 503.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 504.

а) По формуле n-го члена находим: $a_5 = 5 + 0{,}6 \cdot 4 = 7{,}4$.

б) По формуле n-го члена находим: $a_{26} = 5 + 0{,}6 \cdot 25 = 20$.

в) По формуле n-го члена находим: $a_{32} = 5 + 0{,}6 \cdot 31 = 23{,}6$.

№ 505.

а) По формуле n-го члена находим: $a_8 = a_1 + 7d$;

б) По формуле n-го члена находим: $a_5 = a_1 + 4d$.Осталось найти $a_{14} = a_1 + 13d = (a_1 + 4d) + 9d = a_5 + 9d$.

№ 506.

а) Найдём разность арифметической прогрессии (x_n):

$x_8 = x_1 + 7d \Leftrightarrow d = (x_8 - x_1) : 7 \Leftrightarrow d = (-7 - 14) : 7 = -3$;

б) Найдём разность арифметической прогрессии (x_n):

$x_5 = x_1 + 4d$; $x_{14} = x_1 + 13d = x_1 + 4d + 9d \Leftrightarrow x_{14} = x_5 + 9d \Leftrightarrow d = (x_{14} - x_5) : 9 \Leftrightarrow \Leftrightarrow d = (50 - (-4)) : 9 = 6$.

№ 507.

а) Найдём первый член арифметической прогрессии (y_n):

$y_{12} = y_1 + 11d \Leftrightarrow y_1 = y_{12} - 11d \Leftrightarrow y_1 = -23 - 11 \cdot (-2) = -23 + 22 = -1$.

б) Найдём первый член арифметической прогрессии (y_n). Для этого найдём разность арифметической прогрессии.

Если $y_6 = y_1 + 5d$, то $y_{18} = y_1 + 17d = y_1 + 5d + 12d \Leftrightarrow d = (y_{18} - y_6) : 12 \Leftrightarrow d = 3$.

Подставим в формулу $y_6 = y_1 + 5d \Leftrightarrow 16 = y_1 + 5 \cdot 3 \Leftrightarrow y_1 = 1$.

№ 508.

Обозначим через (c_n) арифметическую прогрессию 1,8; 2,2; 2,6; ..., разность $d = 2{,}2 - 1{,}8 = 0{,}4$.

Чтобы найти сто пятидесятый член арифметической прогрессии, необходимо воспользоваться формулой n-ого члена арифметической прогрессии:

$c_{150} = 1{,}8 + 149 \cdot 0{,}4 = 61{,}4$.

№ 509.

Обозначим через (a_n) арифметическую прогрессию 3; 7; 11; ... Её разность $d = 7 - 3 = 4$.

Чтобы узнать, является ли данное число членом этой прогрессии, решим уравнение $a_n = a_1 + d\,(n - 1)$ относительно n. Если получим, что n — натуральное число, то данное число является членом арифметической прогрессии; если же $n \notin \mathbf{N}$, то число не является членом арифметической прогрессии.

а) Решим уравнение относительно n: $123 = 3 + 4\,(n - 1)$. Отсюда $n = 31$. Значит, число 123 –член данной прогрессии.

б) Решим уравнение относительно n: $132 = 3 + 4\,(n - 1)$. Отсюда $n = 33{,}25$. Число 132 не является членом арифметической прогрессии.

Остальные числа определяются аналогично.

№ 510.

а) Обозначим через (x_n) арифметическую прогрессию 18;14;10;6; ...

Для того, чтобы найти формулу общего члена арифметической прогрессии, воспользуемся формулой n-го члена, для этого найдём разность арифметической прогрессии $d = 14 - 18 = -4$.

$x_n = 18 - 4(n - 1)$.

б) $d = 2\frac{1}{3} - 2\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$;

$x_n = 2\frac{1}{6} + \frac{1}{6}(n - 1)$.

№ 511.

По формуле n -го члена имеем два уравнения:

$$\begin{cases} c_5 = c_1 + 4d \\ c_{12} = c_1 + 11d \end{cases}$$

Вычтя из второго уравнения первое, найдём $c_{12} - c_5 = 7d$. Подставляя в это уравнение $c_5 = 1$ и $c_{12} = 15$, найдём $15 - 1 = 7d$, $d = 2$. Отсюда $c_1 = -7$. Значит, $c_n = -7 + 2(n - 1)$, получим $c_7 = 5$.

№ 512.

Запишем формулу n-го члена для данной прогрессии $a_n = 84{,}1 - 5{,}8(n - 1)$. Необходимо найти количество положительных членов арифметической прогрессии, для этого надо решить неравенство $a_n > 0 : 84{,}1 - 5{,}8(n - 1) > 0 \Leftrightarrow 89{,}9 - 5{,}8n > 0 \Leftrightarrow n < 15{,}5$.

Значит, пятнадцатый член прогрессии — последний положительный член арифметической прогрессии.

№ 513.

Для того, чтобы найти разность прогрессии, при которой произведение $x_4 \cdot x_8$ является наибольшим, составим уравнения.

Если $x_7 = 3$, то $x_7 = x_1 + 6d = 3$;

Рассмотрим произведение $x_4 \cdot x_8 = (x_1 + 3d)(x_1 + 7d) = (x_1 + 6d - 3d)(x_1 + 6d + d) =$
$= (3 - 3d)(3 + d)$

Найдем, при каком значении d произведение $(3 - 3d)(3 + d)$ является наибольшим, для этого преобразуем произведение:

$(3 - 3d)(3 + d) = -3(d^2 + 2d - 3) = -3((d + 1)^2 - 4)$

При $d = -1$ выражение будет принимать наибольшее значение.

№ 514.

Для того, чтобы найти разность, составим уравнение. Если a_6 составляет 60%, от a_3, то $a_6 = 0{,}6\, a_3$.

Тогда $a_6 + a_3 = 48 \Leftrightarrow 0{,}6a_3 + a_3 = 48 \Leftrightarrow a_3 = 30$; $a_6 = 18$

Используем формулу n-го члена прогрессии:

$30 = a_1 + 2d$

$18 = a_1 + 5d = a_1 + 2d + 3d \Leftrightarrow 18 = 30 + 3d \Leftrightarrow 3d = -12 \Leftrightarrow d = -4$.

№ 515.

Пусть арифметическая прогрессия, для которой 2, 10, $5\sqrt{2}$ являются некоторыми членами, существует. Это означает, что для некоторых номеров k, m, n выполняются равенства $a_k = 2$, $a_m = 10$, $a_n = 5\sqrt{2}$. То есть $a_1 + d(k - 1) = 2$, $a_1 + d\,(m - 1) = 10$, $a_1 + d(n-1) = 5\sqrt{2}$, откуда, вычитая, получаем: $d\,(m - k) = 8$, $d\,(m - n) = 10 - 5\sqrt{2}$. Разделив второе равенство на первое (выражения не обращаются в 0, и разность $d \neq 0$), получаем: $\frac{m-n}{m-k} = \frac{10-5\sqrt{2}}{8}$, откуда $\sqrt{2} = 2 - \frac{8(m-n)}{5(m-k)}$. Число в правой части равенства — рациональное, поэтому получаем, что $\sqrt{2}$ — рациональное число. Противоречие.

Ответ: не могут.

№ 516.

Для того, чтобы найти пятый член арифметической прогрессии, воспользуемся формулой n-го члена арифметической прогрессии.

$a_5 = a_1 + 4d$. Если $a_3 + a_7 = 21$, то $a_1 + 2d + a_1 + 6d = 21 \Leftrightarrow 2a_1 + 8d = 21 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 2(a_1 + 4d) = 21 \Leftrightarrow 2a_5 = 21 \Leftrightarrow a_5 = 10{,}5$.

№ 517

$a_3 = 20$, $a_9 = 2$, a_n —?, a_5 —?

Чтобы решить задачу, выразим каждый из членов прогрессии через a_1 и d и решим полученную систему уравнений.

Используем формулу n-го члена

$$\begin{cases} 20 = a_1 + 2d \\ 2 = a_1 + 8d \end{cases}$$

$18 = -6d$

$d = -3$

$a_1 = 26$

$a_n = 26 - 3(n - 1).$

$a_5 = 26 - 3 \cdot 4 = 14.$

№ 518.

а) По условию известно, что

$$\begin{cases} a_4 + a_8 = 35 \\ a_3 + a_{21} = 65 \end{cases}$$

Чтобы решить задачу, выразим каждый из членов прогрессии через a_1 и d.

Используем формулу n-го члена

$$\begin{cases} a_1 + 3d + a_1 + 7d = 35 \\ a_1 + 2d + a_1 + 20d = 65 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a_1 + 10d = 35 \\ 2a_1 + 22d = 65 \end{cases}$$

Из второго уравнения вычтем первое:

$12d = 30$

$d = 2{,}5$

Подставим в одно из уравнений: $2a_1 + 25 = 35 \Leftrightarrow a_1 = 5.$

б)

$$\begin{cases} a_5 + a_9 = 42 \\ a_3 \cdot a_{10} = 165 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 + 4d + a_1 + 8d = 42 \\ (a_1 + 2d)(a_1 + 9d) = 165 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2a_1 + 12d = 42 \\ (a_1 + 2d)(a_1 + 9d) = 165 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + 6d = 21 \\ (a_1 + 2d)(a_1 + 9d) = 165 \end{cases} \qquad \begin{cases} a_1 = 21 - 6d \\ (21 - 6d + 2d)(21 - 6d + 9d) = 165 \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$(21 - 4d)(21 + 3d) = 165 \Leftrightarrow 441 + 63d - 84d - 12d^2 = 165 \Leftrightarrow 4d^2 + 7d - 92 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow d = 4$ или $d = -5{,}75.$

$$\begin{cases} d = 4 \\ a_1 = -3 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} d = -5{,}75 \\ a_1 = 55{,}5 \end{cases}$$

№ 519.

Для того, чтобы выяснить является последовательность арифметической прогрессией, воспользуемся характеристическим свойством $a_n = \dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}$, где $n > 1$.

а) $\dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = (-8(n-1) - 1 - 8(n+1) - 1) : 2 = (-16n - 2) : 2 = -8n - 1 = a_n$, значит, (a_n) является арифметической прогрессией;

б) $\dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \left(5(n-1)^2 - 4(n-1) + 5(n+1)^2 - 4(n+1)\right) : 2 = 5n^2 + 5 - 4n \neq a_n$, значит, (a_n) не является арифметической прогрессией;

в) $\dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \left(-4{,}4(n-1) - 4{,}4(n+1)\right) : 2 = -4{,}4n = a_n$, значит, (a_n) является арифметической прогрессией;

г) $\dfrac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = \left(25 - 0{,}16(n-1) + 25 - 0{,}16(n+1)\right) : 2 = 25 - 0{,}16n = a_n$ значит, (a_n) является арифметической прогрессией.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 532.*

Пусть a — один из членов прогрессии, а d — её разность. По условию, числа $a(a + d)$ и $a(a + 2d)$ — также члены прогрессии; значит, их разность имеет вид nd при некотором целом n, то есть $ad = nd$. Поскольку $d > 0$, получаем $a = n$, то есть a — целое число.

№ 533.*

Покажем, что среди 5 подряд идущих членов этой прогрессии найдется член, делящийся на 5.

Пусть, n, $n + 6$, $n + 12$, $n + 18$, $n + 24$ — пять подряд идущих членов прогрессии. Но среди 5 подряд идущих чисел n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$ всегда найдется число, делящееся на 5. Тогда из равенств $n + 6 = (n + 1) + 5$, $n + 12 = (n + 2) + 10$, $n + 18 = (n + 3) + 15$, $n + 24 = (n + 4) + 20$ следует, что среди первых пяти чисел найдется число, делящееся на 5.

Перейдем к решению задачи.

Покажем, что не более пяти подряд идущих членов рассматриваемой прогрессии могут оказаться простыми числами.

Пусть у нас есть пять подряд идущих членов прогрессии, и среди них нет числа 5. Тогда, по доказанному выше, среди них есть член, делящийся на 5. Это число не является простым. Поэтому среди шести членов прогрессии простых чисел будет не более пяти.

Пусть теперь среди членов прогрессии есть число 5. Тогда число 5 — наименьший член прогрессии (так как $5 - 6 < 0$). Тогда прогрессия восстанавливается однозначно: 5, 11, 17, 23, 29, 35. Первые пять чисел в этой последовательности — простые, шестое — уже составное. То есть мы показали, что пять подряд идущих членов рассматриваемой прогрессии могут оказаться простыми числами, а среди любых шести подряд идущих членов прогрессии найдется составное число.

Ответ: пять (5, 11, 17, 23, 29).

№ 534.*

Пусть d — разность прогрессии. Найдем такое n, что $d < 10^n$. Рассмотрим числа $A = 999...999000...000$ (сначала идет 999 девяток, потом n нулей) и $B = 999...999$ (число из $999 + n$ девяток). Их разность $B - A = 10^n - 1 \geqslant 0$, поэтому среди чисел от A до B найдется член прогрессии. Его десятичная запись будет начинаться не менее чем с 999 девяток, что и требовалось.

№ 535.*

Пусть числа a, b, a^2 входят в прогрессию. Тогда $b = a + nd$, $a^2 = a + md$. Отсюда $b - a = nd$. Поэтому $b^2 = a^2 + b^2 - a^2 = a^2 + (b - a)(b + a) = a + md + nd(b + a) = a + kd$, то есть b^2 также входит в прогрессию.

П. 3.2.2. Сумма первых *n* членов арифметической прогрессии

Основные содержательные цели.

1) Вывести формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии: $S_n = \frac{(x_1 + x_n) \cdot n}{2}$ и $S_n = \frac{2x_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$, где $n = 1; 2; 3; ...$ и сформировать умение их применять.

2) Тренировать умение решать задачи на использование понятия арифметической прогрессии и формулы ее общего члена. Закрепить умение решать задачи с помощью дробно-рационального уравнения.

Для более подготовленных учащихся с помощью задания № 536 можно организовать самостоятельный вывод следующего свойства:

если a_n — арифметическая прогрессия и $b + c = d + e$ (b, c, d, $e \in N$), то $a_b + a_c = a_d + a_e$.

Далее учащихся нужно познакомить со следствием этого свойства: в конечной арифметической прогрессии сумма членов, равноудаленных от крайних ее членов, равна сумме крайних ее членов. Иначе это свойство можно сформулировать следующим образом: попарные суммы членов S_n арифметической прогрессии, равноудаленных от ее начала x_1 и конца x_n, всегда равны. В дальнейшем это свойство будет осознанно использоваться учащимися при выводе формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии. Для общеобразовательных классов знакомство с этим свойством в явном виде не является обязательным, оно поясняется учителем при выводе формулы суммы.

Для проблематизации и уяснения смысла задачи поиска суммы первых n членов арифметической прогрессии можно использовать № 537.

Для **самостоятельного вывода** формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии рекомендуется выполнить № 538. В общеобразовательном классе эту формулу выводит учитель в подводящем диалоге.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 540.

Для нахождения суммы n первых членов арифметической прогрессии используется формула $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

$$S_{24} = \frac{2\cdot(-4,2)+0,6\cdot 23}{2}\cdot 24 = \frac{-8,4+13,8}{2}\cdot 24 = 2,7\cdot 24 = 64,8.$$

№ 541.

Обозначим через (x_n) арифметическую прогрессию 14; 9; 4; ...

Для того, чтобы найти сумму 40 первых членов арифметической прогрессии, воспользуемся формулой нахождения суммы n-го члена, для этого найдём разность арифметической прогрессии $d = 9 - 14 = -5$.

$$S_{40} = \frac{2\cdot 14 - 5\cdot 39}{2}\cdot 40 = -167\cdot 20 = -3340.$$

№ 542.

Воспользуемся формулой:

$S_{36} = \frac{a_1 + a_{36}}{2}\cdot 36$, $a_1 = 0,4 + 5 = 5,4$, $a_{36} = 0,4 \cdot 36 + 5 = 14,4 + 5 = 19,4$.

Значит, $S_{36} = \frac{5,4+19,4}{2}\cdot 36 = 446,4$.

№ 543.

а) Последовательность четных чисел образует арифметическую прогрессии с первым членом 2 и n-ым членом, равным 1000. Разность равна 2.

Вначале определим количество членов в данной арифметической прогрессии:

$n = 1000 : 2 = 500$;

$$S_{500} = \frac{2+1000}{2}\cdot 500 = 250500.$$

б) Пусть a_n — арифметическая прогрессия, $a_1 = 11$, $d = 11$, $a_n = 374$, поэтому $n = 34$.

$$S_{34} = \frac{2\cdot 11 + 11\cdot 33}{2}\cdot 34 = 6545.$$

в) Пусть x_n — арифметическая прогрессия; $x_1 = 5$; $d = 4$.
Необходимо найти количество членов арифметической прогрессии:
$145 = 5 + 4(n - 1)$
$145 = 1 + 4n$
$144 = 4n$
$n = 36$
Найдем сумму 36 членов арифметической прогрессии.

$$S_{36} = \frac{2\cdot5+4\cdot35}{2}\cdot36 = 2700.$$

№ 544.

Так как за каждое попадание начисляли на 0,9 балла больше, чем за предыдущее, то мы имеем арифметическую прогрессию с разностью 0,9. Первый член прогрессии равен 13. Сумма n первых членов арифметической прогрессии равна 215,4.

$$S_n = \frac{2\cdot13+0{,}9(n-1)}{2}\cdot n$$

$$215{,}4 = \frac{26+0{,}9n-0{,}9}{2}\cdot n$$

$0{,}9n^2 + 25{,}1n - 430{,}8 = 0$

$n = 12$ и $n = 39\frac{16}{18}$; $39\frac{16}{18}$ — не может являться номером арифметической прогрессии
Всего попаданий было 12, промахов было 18.

№ 545.

$S_5 = \frac{2a_1+4d}{2}\cdot5$; $S_{10} = \frac{2a_1+9d}{2}\cdot10$, так как

$$S_{10} - S_5 = 3S_5 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2a_1+9d}{2}\cdot10 - \frac{2a_1+4d}{2}\cdot5 = 3\cdot\frac{2a_1+4d}{2}\cdot5$$

$2(2a_1 + 4d) = 2a_1 + 9d$
$2a_1 - d = 0$
$d = 2a_1$
Составим уравнение, используя формулу n-го члена арифметической прогрессии
$a_7 = 52$
$52 = a_1 + 6d$
Подставим в уравнение d, получим
$52 = a_1 + 6 \cdot 2a_1$
$a_1 = 4$, тогда $d = 8$
Найдём $a_3 = 4 + 8 \cdot 2 = 20$.

№ 546.

а) Для нахождения S_{10} найдем разность арифметической прогрессии.
Если $a_1 = 6$, а $a_{13} = 42$
$42 = 6 + 12d$

$d = 3$, отсюда $S_{10} = \frac{2\cdot6+3\cdot9}{2}\cdot10 = 195$.

б) Для нахождения S_{10} найдем разность и первый член арифметической прогрессии.
Если $a_6 = 45$, а $a_{14} = -43$, составим систему:

$$\begin{cases} 45 = a_1 + 5d \\ -43 = a_1 + 13d \end{cases}$$

Вычтем из первого второе уравнение.

$88 = -8d$
$d = -11$
$45 = a_1 - 55$
$a_1 = 100$
$S_{10} = \frac{200-99}{2} \cdot 10 = 101 \cdot 5 = 505$.

в) Для нахождения S_{10} найдем разность и первый член арифметической прогрессии.

$a_3 + a_7 = 5$; $a_4 = 1$
Составим систему:

$$\begin{cases} a_1 + 2d + a_1 + 6d = 5 \\ 1 = a_1 + 3d \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a_1 + 8d = 5 \\ a_1 = 1 - 3d \end{cases}$$

Для решения системы, используем способ подстановки:
$2(1 - 3d) + 8d = 5$
$2 + 2d = 5$
$d = 1,5$
$a_1 = -3,5$
$S_{10} = 32,5$.

№ 547.

Для нахождения тринадцатого члена арифметической прогрессии, необходимо найти разность, для этого воспользуемся формулой $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

$10 = \frac{2 \cdot 9 + d \cdot 9}{2} \cdot 10$

$d = -1\frac{7}{9}$

Можно найти $a_{13} = 9 + \left(-1\frac{7}{9}\right) \cdot 12 = -\frac{37}{3} = -12\frac{1}{3}$.

№ 548.

Для нахождения первого и девятого членов арифметической прогрессии, воспользуемся формулой суммы n-го члена арифметической прогрессии

$S_{20} = \frac{2a_1 - 4 \cdot 19}{2} \cdot 20$

$336 = \frac{2a_1 - 76}{2} \cdot 20$

$a_1 = 54,8$
$a_9 = 54,8 - 4 \cdot 8 = 22,8$.

№ 549.

Для нахождения суммы первых n членов арифметической прогрессии используется формула $S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$.

$S_{35} - S_{24} = \frac{2 \cdot 40 - 2 \cdot 34}{2} \cdot 35 - \frac{2 \cdot 40 - 2 \cdot 23}{2} \cdot 24 = 6 \cdot 35 - 17 \cdot 24 = 210 - 408 = -198$.

№ 550.

а) Можно найти сумму первых десяти членов данной прогрессии. Если $a_5 + a_6 = 10$, то

$a_1 + 4d + a_1 + 5d = 10 \Leftrightarrow 2a_1 + 9d = 10$.

Используя формулу нахождения суммы первых n членов, получим $S_{10}=\frac{2a_1+9d}{2}\cdot 10=50$

б) Нельзя найти сумму одиннадцати членов прогрессии, так как, например, уменьшив первый член прогрессии на 2, а разность увеличив на 1, мы получим такую же сумму $a_5 + a_6$, в то время как сумма одиннадцати членов прогрессии увеличится на $10 - 4 = 6$.

№ 551.

Если $b_1 = 1$; $b_{n+1} = b_n - 3$, то $b_2 = -2$, тогда $d = -3$.

$b_n = 1 - 3(n - 1) = 4 - 3n$.

$S_5=\frac{2-3\cdot 4}{2}\cdot 5=-25$.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 566.*

Пусть $S = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Но (a_n) — арифметическая прогрессия, поэтому $S=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$. Откуда $2S = (a_1 + a_n)n$. Значит, $2S$ делится на n. Но S — степень двойки (по условию), и поэтому $2S$ — степень двойки, а число n — делитель числа $2S$. Поэтому число n в разложении на простые множители не может иметь простых делителей, отличных от двойки. Поэтому n — степень двойки.

§ 3. Геометрическая прогрессия

П.3.3.1. Геометрическая прогрессия. Формула общего члена

Основные содержательные цели.

1) Сформировать понятие геометрической прогрессии, ее знаменателя.

2) Вывести формулу общего члена геометрической прогрессии и сформировать умение ее применять.

3) Познакомить учащихся со свойствами и признаками геометрической прогрессии.

4) Тренировать умение применять формулу суммы и формулу общего члена арифметической прогрессии при решении задач. Закрепить умение решать квадратные неравенства.

Для подготовки введения понятия геометрической прогрессии, знаменателя геометрической прогрессии можно воспользоваться заданиями № 567 — № 569. Для введения понятия геометрической прогрессии, знаменателя геометрической прогрессии используется № 570. Для **самостоятельного вывода** формулы общего члена геометрической прогрессии рекомендуется выполнить № 571.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 572.

По формуле n-го члена геометрической прогрессии:

$b_1 = -2$

$b_2 = (-2) \cdot (-3) = 6$

$b_3 = 6 \cdot (-3) = -18$

$b_4 = -18 \cdot (-3) = 54$

№ 573.

а) $b_2=\frac{1}{625}\cdot(-5)=-0{,}008$;

б) $b_4=\frac{1}{625}\cdot(-5)^3=-0{,}2$;

в) $b_7=\frac{1}{625}\cdot(-5)^6=25$;

г) $b_k=\frac{1}{625}\cdot(-5)^{k-1}$.

№ 574.

Для того, чтобы найти седьмой член геометрической прогрессии, найдем знаменатель геометрической прогрессии.

$\begin{cases}b_8=12\\ b_9=4\end{cases}$ $\begin{cases}12=b_1\cdot q^7\\ 4=b_1\cdot q^8\end{cases}$

Воспользуемся способом подстановки.

Получим $3=\frac{1}{q}$ $\Leftrightarrow$ $q=\frac{1}{3}$. Подставим q в одно из уравнений, найдем $b_1:12=b_1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^7$.

Отсюда, $b_7=36$.

№ 575.

Пусть (b_n) — геометрическая прогрессия.

По формуле n-го члена геометрической прогрессии $b_5=b_1\cdot q^4$.

Так как $b_1=\frac{1}{256}$, а $q=b_2:b_1=-2$, то $b_5=\frac{1}{256}\cdot(-2)^4=0{,}0625$.

№ 576.

а) По формуле n-го члена геометрической прогрессии: $a_5=a_1\cdot q^4$.

б) По формуле n-го члена геометрической прогрессии: $a_4=a_1\cdot q^3$; $a_7=a_1\cdot q^6=$ $=a_1\cdot q^3\cdot q^3=a_4\cdot q^3$.

№ 577.

а) Используя формулу n-го члена геометрической прогрессии: $c_5=c_1\cdot q^4$, найдем $c_1=c_5:q^4$.

Если $c_5=\frac{2}{3}$, а $q=\frac{2}{3}$, то $c_1=\frac{2}{3}:\left(\frac{2}{3}\right)^4=\frac{27}{8}=3\frac{3}{8}$.

б) Так как заданы четвёртый и седьмой члены геометрической прогрессии, то составим уравнения, используя формулу n-го члена геометрической прогрессии.

$\begin{cases}c_4=c_1\cdot q^3\\ c_7=c_1\cdot q^6=c_1\cdot q^3\cdot q^3\end{cases}$ $\begin{cases}8=c_1\cdot q^3\\ -64=c_1\cdot q^3\cdot q^3\end{cases}$

Отсюда $-64=8\cdot q^3\Leftrightarrow q=-2$.

Подставим значение знаменателя в первое уравнение, получим $c_1=-1$.

№ 578.

Пусть b_n — геометрическая прогрессия. Из условия задания имеем $b_1=2$, $b_3=8$. Используя формулу n-го члена геометрической прогрессии, имеем:

$b_3=b_1\cdot q^2$. Подставим известные данные в уравнение: $8=2\cdot q^2\Leftrightarrow q_1=2$ или $q_2=-2$.

Если $q_1=2$, то $b_2=2\cdot 2=4$.

Если $q_2=-2$, то $b_2=2\cdot(-2)=-4$.

№ 579.

Для того, чтобы записать формулу n-го члена геометрической прогрессии и найти седьмой член, нужно найти знаменатель и первый член прогрессии.

$b_2 = b_1 \cdot q$

$b_5 = b_1 \cdot q^4 = b_1 \cdot q \cdot q^3$

$-24 = 3 \cdot q^3 \Leftrightarrow q^3 = -8 \Leftrightarrow q = -2$

$3 = b_1 \cdot (-2) \Leftrightarrow b_1 = -1{,}5$

$b_n = (-1{,}5) \cdot (-2)^{n-1}$

$b_7 = (-1{,}5) \cdot (-2)^6 = -96.$

Ответ: $b_n = (-1{,}5) \cdot (-2)^{n-1}$; $b_7 = -96.$

№ 580.

По условию каждая одноклеточная водоросль увеличивается в четыре раза, после чего делится на четыре клетки. Данное деление представляет собой геометрическую прогрессию. Изначально было 100 таких растений, первый член такой прогрессии равен 100. Знаменатель равен 4. Необходимо найти количество клеток после пяти делений, то есть шестой член такой прогрессии, так как в первый раз было 100 клеток, а потом ещё пять делений.

$b_6 = 100 \cdot 4^{6-1} = 102400.$

Ответ: $b_6 = 102400.$

№ 581.

Пусть $b_1 = n$, $b_2 = n + 15$, $b_3 = 46n - 30$

$q = \dfrac{n+15}{n}$

$b_2 = b_1 \cdot q$

$b_3 = b_1 \cdot q^2 = b_2 \cdot q$

Подставим данные из условия в формулу:

$46n - 30 = (n + 15) \cdot q \Leftrightarrow 46n - 30 = n \cdot \left(\dfrac{n+15}{n}\right)^2 \Leftrightarrow 45n^2 - 60n - 225 = 0 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 3n^2 - 4n - 15 = 0.$

Корни уравнения: $n = 3$ и $n = -2$ (-2 не является номером члена геометрической прогрессии).

Ответ: 3.

№ 582.

По условию известно:

$\begin{cases} b_1 + b_2 = 20 \\ b_3 + b_4 = 180 \end{cases}$ $\begin{cases} b_1 + b_1 \cdot q = 20 \\ b_1 \cdot q^2 + b_1 \cdot q^3 = 180 \end{cases}$ $\begin{cases} b_1(1+q) = 20 \\ b_1 q^2(1+q) = 180 \end{cases}$

Для решения системы используем способ подстановки, получим

$q^2 \cdot 20 = 180$

$q^2 = 9$

$q = 3$ и $q = -3$

Если $q = 3$, то $b_1 = 5$, тогда $405 = 5 \cdot 3^{n-1} \Leftrightarrow n = 5.$

Если $q = -3$, то $b_1 = -10$, тогда $405 = -10 \cdot (-3)^{n-1} \Leftrightarrow$ не является членом геометрической прогрессии

Ответ: 5.

№ 583.

Если $b_3 \cdot b_7 = 4$, то для того чтобы найти пятый член прогрессии, воспользуемся формулой n-го члена геометрической прогрессии:

$b_1 \cdot q^2 \cdot b_1 \cdot q^6 = 4$

$b_1^2 \cdot q^8 = 4$

Откуда: $b_1 \cdot q^4 = 2$ или $b_1 \cdot q^4 = -2.$

Левая часть представляем собой формулу для нахождения пятого члена геометрической прогрессии.

Ответ: 2 или –2.

№ 584.

Для того, чтобы определить является ли данная последовательность геометрической прогрессией, воспользуемся формулой n-го члена.

Если $b_8 = 12$, а $b_{12} = -8$, то

$$\begin{cases} 12 = b_1 \cdot q^7 \\ -8 = b_1 \cdot q^{11} \end{cases}$$

Отсюда $12 \cdot q^4 = -8 \Leftrightarrow q^4 = -1{,}5$ — уравнение не имеет решений.

Данная последовательность не является геометрической прогрессией.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 599.*

Пусть a — первое из двух чисел исходной последовательности, d — разность арифметической прогрессии, а q — знаменатель геометрической прогрессии. Тогда по условию задачи $a + d = aq$, $a + 9d = aq^2$.

Следовательно, $a(q - 1) = d$ и $a(q - 1)(q + 1) = a(q^2 - 1) = 9d = 9a(q - 1)$. Поскольку $q \neq 1$, отсюда получаем $q = 8$ и $aq^3 = a + a(q^3 - 1) = a + a(q - 1)(q^2 + q + 1) = a + 73d$. Таким образом, четвертый член геометрической прогрессии совпал с 74-м членом арифметической прогрессии.

Ответ: совпал с 74-м членом.

П. 3.3.2. Сумма первых *n* членов геометрической прогрессии

Основные содержательные цели.

1) Вывести формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии:

$$S_n = x_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ где } q \neq 1,\ n = 1, 2, \ldots$$

и сформировать умение ее применять.

2) Тренировать умение решать задачи на использование понятия геометрической прогрессии и формулы ее общего члена. Закрепить умение решать рациональные неравенства методом интервалов.

Для проблематизации и уяснения смысла задачи поиска суммы первых n членов геометрической прогрессии можно использовать № 600. Для **самостоятельного вывода** формулы суммы первых n членов арифметической прогрессии рекомендуется выполнить № 601. В общеобразовательном классе эту формулу выводит учитель в подводящем диалоге.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 602.

По условию известно: $b_1 = \dfrac{1}{259}$, а $q = 6$, воспользуемся формулой нахождения суммы первых n членов геометрической прогрессии.

$$S_4 = \frac{1}{259} \cdot \frac{6^4 - 1}{6 - 1} = 1.$$

№ 603.

По условию дан ряд чисел, которые составляют геометрическую прогрессию со знаменателем $q=\frac{108}{162}=\frac{2}{3}$.

$$S_6=162\cdot\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^6-1}{\frac{2}{3}-1}=443\frac{1}{3}.$$

№ 604.

Необходимо найти знаменатель: $q = 18 : 6 = 3$, отсюда $b_1 = 2$.

$$S_7=2\cdot\frac{3^7-1}{3-1}=3^7-1=2186.$$

№ 605.

Используем формулу n-го члена геометрической прогрессии для нахождения знаменателя первого члена последовательности.

$b_3 = b_1 \cdot q^2$

$b_6 = b_1 \cdot q^5 = b_1 \cdot q^2 \cdot q^3$

$$-32=256\cdot q^3 \quad \Leftrightarrow \quad q^3=-\frac{1}{8} \quad \Leftrightarrow \quad q=-\frac{1}{2}$$

Найдём $b_1 = 256 \cdot 4 = 1024$

$$S_9=1024\cdot\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^9-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)-1}=1024\cdot\frac{-\frac{1}{512}-1}{-1{,}5}=684.$$

№ 606.

Дано:

$$\begin{cases} b_3=b_2+6 \\ b_5=b_3+36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1q^2-b_1q=6 \\ b_1q^4-b_1q^2=36 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1q(q-1)=6 \\ b_1q^2(q^2-1)=36 \end{cases}$$

Используем способ подстановки.

$6q(q + 1) = 36$

$q(q + 1) = 6$

$q^2 + q - 6 = 0$

$q_1 = -3$ и $q_2 = 2$

Если $q = -3$, то геометрическая прогрессия не будет возрастающей.

Если $q = 2$, то $b_1 = 3$.

$$S_{10}=3\cdot\frac{2^{10}-1}{2-1}=3069.$$

№ 607.

Для того, чтобы задать последовательность формулой n-го члена и найти сумму первых пяти её членов, необходимо найти знаменатель.

Для этого найдём $b_2 = -3$, тогда $q = -3$.

Получим $b_n = 1 \cdot (-3)^{n-1}$.

$$b_n=-\frac{1}{3}\cdot(-3)^n$$

$$S_5=1\cdot\frac{(-3)^5-1}{-3-1}=61.$$

№ 608.

Первый член данной последовательности равен 20000. Если за каждый следующий год оплата увеличивается на 5% от предыдущей выплаты, для того, чтобы узнать, каждую последующую выплату необходимо предыдущую умножить на 1,05. Данная последовательность будет являться геометрической прогрессией со знаменателем 1,05.

Чтобы узнать, сколько студент выплатит за пятый год обучения, нужно найти пятый член полученной прогрессии. Для этого можно воспользоваться формулой n-го члена геометрической прогрессии ($n = 5$).

$b_5 = b_1 \cdot q^{5-1,}$ где $b_1 = 20000$, $q = 1{,}05$.

Чтобы узнать в какую сумму обойдется 5 лет обучения, необходимо воспользоваться формулой суммы n первых членов геометрической прогрессии ($n = 5$).

$S_5 = b_1 \cdot \dfrac{q^5 - 1}{q - 1}$, где $b_1 = 20000$, $q = 1{,}05$.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 622.*

Пусть b_1 — первый член прогрессии, а q — ее знаменатель.

Составим систему, соответствующую условию задачи:

$$\begin{cases} b_1 + b_1q + b_1q^2 = 3 \\ b_1^2 + b_1^2q^2 + b_1^2q^4 = 21 \end{cases}.$$

Преобразуем:

$$\begin{cases} b_1\left(1+q+q^2\right) = 3 \\ b_1^2\left(1+q^2+q^4\right) = 21 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_1 \dfrac{q^3-1}{q-1} = 3 \\ b_1^2 \dfrac{q^6-1}{q^2-1} = 21 \end{cases}.$$

Разделим второе уравнение на первое:

$$\begin{cases} b_1 \dfrac{q^3-1}{q-1} = 3 \\ b_1 \dfrac{q^3+1}{q+1} = 7 \end{cases}$$

Преобразуем:

$$\begin{cases} b_1\left(1+q+q^2\right) = 3 \\ b_1\left(1-q+q^2\right) = 7 \end{cases}.$$

Разделив первое уравнение на второе, получим уравнение относительно неизвестного q:

$$\frac{1+q+q^2}{1-q+q^2} = \frac{3}{7} \quad \Leftrightarrow \quad 7\left(1+q+q^2\right) = 3\left(1-q+q^2\right) \quad \Leftrightarrow \quad 2q^2 + 5q + 2 = 0.$$

Его решениями будут $q_1 = -2$, $q_2 = -0{,}5$.

Если $q = -2$, то $b_1 = \dfrac{3}{1+q+q^2} = 1$, $b_2 = -2$, $b_3 = 4$, и сумма кубов этих трех членов прогрессии равна 57.

Если $q = -0{,}5$, то $b_1 = \dfrac{3}{1+q+q^2} = 4$, $b_2 = -2$, $b_3 = 1$, и сумма кубов этих трех членов прогрессии также равна 57.

Ответ: 57.

№ 623.*

Предположим, что кузнечик сможет вернуться в исходную точку. Пусть длина первого прыжка кузнечика равна d, и после n прыжков он вернулся в начальную точку. Тогда его путь — замкнутая ломаная $A_1A_2A_3\dots A_nA_1$ со звеньями длины d, $2d$, $4d$, ..., $2^{n-1}d$. Такая ломаная не существует, так как длина одного ее звена больше суммы длин других звеньев: $2^{n-1}d > d + 2d + \dots + 2^{n-2}d$ (поскольку $1 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-2} < 2 + 2 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-2} = 4 + 4 + 8 + \dots + 2^{n-2} = \dots = 2^{n-1}$).

Противоречие.

Ответ: не сможет.

П. 3.3.3*. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии

Основные содержательные цели.

1) Сформировать понятие бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

2) Вывести формулу суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S = \frac{x_1}{1-q}, \text{ где } |q| < 1$$

и сформировать умение ее применять.

3) Тренировать умение применять формулу суммы первых n членов геометрической прогрессии. Закрепить умение решать дробно-рациональные неравенства методом интервалов.

Для повторения формулы суммы первых n членов геометрической прогрессии рекомендуется выполнить № 624. Для подготовки введения понятия бесконечно убывающей геометрической прогрессии и задачи поиска суммы ее членов можно использовать № 625.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 626.

$$q = \frac{3\sqrt{7}}{21} = \frac{\sqrt{7}}{7}.$$

$$S = \frac{21}{1-\frac{\sqrt{7}}{7}} = \frac{21\sqrt{7}}{\sqrt{7}-1} = 3{,}5\left(7+\sqrt{7}\right).$$

№ 627.

Слагаемые являются последовательными членами бесконечной убывающей геометрической прогрессии со знаменателем $\frac{1}{3}$.

$$S = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = 0{,}5.$$

№ 628.

$$75 = \frac{b_1}{1-0{,}8} \quad \Leftrightarrow \quad b_1 = 75\cdot(1-0{,}8) = 15.$$

Ответ: 15.

№ 629.

Для того, чтобы найти пятый член бесконечной убывающей геометрический прогрессии, необходимо вычислить знаменатель последовательности.

Подставим значения условия в формулу для нахождения суммы бесконечной убывающей прогрессии: $-16 = \frac{-24}{1-q} \Leftrightarrow 1-q = 1{,}5 \Leftrightarrow q = -0{,}5$

Найдём $b_5 = -24 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^4 = -1{,}5$.

№ 630.

а) Представим бесконечную периодическую десятичную дробь (0, (2)) в виде суммы разрядных слагаемых: 0,222...= 0,2 + 0,02 + 0,002 + ...

Представлена сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии

Найдём знаменатель этой прогрессии: q = 0,02 : 0,2 = 0,1

Воспользуемся формулой для нахождения суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

$$0,(2) = \frac{0{,}2}{1-0{,}1} = \frac{2}{9}$$

б) Представим бесконечную периодическую десятичную дробь (1,(23)) в виде суммы разрядных слагаемых:

1,2323...= 1 + 0,23 + 0,0023 + 0,000023 + ...

Представлена сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии, где b_1 = 0,23.

Найдём знаменатель этой прогрессии: q = 0,0023 : 0,23 = 0,01.

Воспользуемся формулой для нахождения суммы бесконечной убывающей геометрической прогрессии:

$$1,(23) = 1 + \frac{0{,}23}{1-0{,}01} = 1 + \frac{23}{99} = 1\frac{23}{99} = \frac{122}{99}$$

№ 631.

По заданному условию составим уравнения:

$$\begin{cases} \dfrac{b_1}{1-q} = 27 \\ b_1 \cdot \dfrac{q^3-1}{q-1} = 35 \end{cases} \qquad \begin{cases} 1-q = \dfrac{b_1}{27} \\ b_1 = 27 \cdot \dfrac{b_1 \cdot (1-q^3)}{35} \end{cases}$$

Используем способ подстановки

$$1 = \frac{27}{35} \cdot (1-q^3) \Leftrightarrow q = -\frac{2}{3}$$

Подставим значения знаменателя в первое уравнение, получим b_1 = 45.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 639*.

Пусть такое возможно. Тогда у двух ребят B и C, стоящих через одного соответственно по часовой стрелке и против часовой стрелки от мальчика A, количество денег либо одинаково, либо отличается на 10 рублей. А мальчики B и C стоят рядом. Аналогично рассуждая, получаем, что у любых двоих ребят, стоящих рядом, количество денег либо одинаково, либо отличается на 10 рублей. Но тогда у любых двоих разность между количеством денег делится на 10, что противоречит условию задачи.

Ответ: не могло.

П. 3.3.4*. Линейные рекуррентные соотношения

Основные содержательные цели.

1) Сформировать понятие арифметико-геометрической прогрессии и формулы ее общего члена.

2) Сформировать представление о линейных рекуррентных соотношениях первого и второго порядка.

3) Тренировать умение применять формулу суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Закрепить умение доказывать неравенства.

Для **самостоятельного открытия** понятия арифметико-геометрической прогрессии рекомендуется выполнить № 640.

Приведем **решение** задания **№ 641** данного пункта.

а) Данная последовательность — арифметико-геометрическая прогрессия, у которой $x_1 = 0$, $q = 2$, $d = 2$. Подставим эти значения в формулу общего члена арифметико-геометрической прогрессии:

$$x_n = \left(x_1 + \frac{d}{q-1}\right)q^{n-1} - \frac{d}{q-1} = \left(0 + \frac{2}{2-1}\right)2^{n-1} - \frac{2}{2-1} = 2^n - 2.$$

б) Данная последовательность — арифметико-геометрическая прогрессия, у которой $x_1 = 50$, $q = \frac{1}{2}$, $d = 1$. Подставим эти значения в формулу общего члена арифметико-геометрической прогрессии:

$$x_n = \left(x_1 + \frac{d}{q-1}\right)q^{n-1} - \frac{d}{q-1} = \left(50 + \frac{1}{\frac{1}{2}-1}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \frac{1}{\frac{1}{2}-1} = 48\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2 = \frac{96}{2^n} + 2.$$

Ответ: а) $x_n = 2^n - 2$; б) $x_n = \frac{96}{2^n} + 2$.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 649.*

Будем искать последовательность x_n, удовлетворяющую рекуррентному соотношению, в виде $x_n = \lambda^n$. Тогда $\lambda^{n+2} = 7\lambda^{n+1} - 12\lambda^n$. Так как $\lambda \neq 0$, то поделим уравнение на λ^n: $\lambda^2 = 7\lambda - 12$. Решениями этого уравнения будут $\lambda_1 = 3$ и $\lambda_2 = 4$. Значит, общий вид последовательности, удовлетворяющей рекуррентному соотношению, есть $x_n = a\cdot 3^n + b\cdot 4^n$. Найдем коэффициенты a и b из условия $x_1 = 1$, $x_2 = 2$.

Получим систему:

$$\begin{cases} x_1 = 1 = a\cdot 3^1 + b\cdot 4^1 \\ x_2 = 2 = a\cdot 3^2 + b\cdot 4^2 \end{cases}.$$

То есть $\begin{cases} 3a + 4b = 1 \\ 9a + 16b = 2 \end{cases}$. Решая ее, находим, что $a = \frac{2}{3}$, $b = -\frac{1}{4}$.

Таким образом, получаем формулу общего члена: $x_n = \frac{2}{3}\cdot 3^n - \frac{1}{4}\cdot 4^n = 2\cdot 3^{n-1} - 4^{n-1}$.

Ответ: $x_n = 2\cdot 3^{n-1} - 4^{n-1}$.

№ 650.*

Воспользуемся формулой общего члена последовательности Фибоначчи:

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}.$$

Значит, нам нужно доказать, что

$$\left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}\right)^2 + \left(\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}}{\sqrt{5}}\right)^2 = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}}{\sqrt{5}}.$$

Раскроем квадраты:

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} - 2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}}{5} +$$

$$+\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2} - 2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2}}{5} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}}{\sqrt{5}}$$

Заметим, что $\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) = \frac{1-5}{4} = -1$. Поэтому

$$-2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} = -2(-1)^n - 2(-1)^{n+1} = -2(-1)^n(1+(-1)) = 0.$$

Значит, нам осталось доказать, что

$$\frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2}}{5} = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1}}{\sqrt{5}}.$$

Домножим обе части на 5, перенесем все слагаемые влево и сгруппируем.

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2} - \sqrt{5}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+2} + \sqrt{5}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n+1} = 0.$$

Вынесем множители:

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\left(1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \sqrt{5}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right) + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\left(1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \sqrt{5}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right) = 0.$$

Преобразуем выражения, стоящие в скобках:

$$1+\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 - \sqrt{5}\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1+\frac{1+5+2\sqrt{5}}{4} - \frac{\sqrt{5}+5}{2} = 1+\frac{3+\sqrt{5}}{2} - \frac{\sqrt{5}+5}{2} = 0,$$

$$1+\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \sqrt{5}\cdot\frac{1-\sqrt{5}}{2} = 1+\frac{1+5-2\sqrt{5}}{4} + \frac{\sqrt{5}-5}{2} = 1+\frac{3-\sqrt{5}}{2} + \frac{\sqrt{5}-5}{2} = 0.$$

То есть $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\cdot 0 + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{2n}\cdot 0 = 0$.

В результате эквивалентных преобразований мы получили верное тождество $0 = 0$. Значит, мы доказали исходное тождество.

Глава 4. Решение уравнений и неравенств высших степеней

Четвертая глава очень насыщена по своему содержанию, она объединяет в себе темы, которые развивают умения учащихся по решению уравнений и неравенств. Сначала учащиеся расширяют свои представления о том или ином понятии, а затем применяют их при решении уравнений или неравенств нового вида.

Первый параграф посвящен расширению понятия корня. Изучение корня n-й степени в 9 классе происходит по той же схеме, что и изучение арифметического квадратного корня в 8 классе. Сначала учащиеся знакомятся с понятием кубического корня и расширяют это понятие до корня n-й степени. Здесь же, отталкиваясь от уже известного понятия арифметического квадратного корня, вводится понятие арифметического корня n-й степени. Далее учащиеся знакомятся с основными свойствами корней n-й степени, сопоставляя их с уже изученными свойствами квадратного корня. На основании этих свойств учащиеся учатся преобразовывать числовые и буквенные выражения со знаком корня n-й степени. Помимо знакомства с простейшими преобразованиями, связанными с непосредственным применением определения и свойств корня n-й степени учащиеся знакомятся с операциями внесения множителя под знак корня, вынесения множителя из-под корня, приведения радикалов к общему показателю, освобождения от иррациональности в знаменателе (числителе). Отдельный пункт посвящен более сложным преобразованиям выражений, содержащих корни n-й степени, основанным на использовании формул сокращенного умножения и комбинировании уже известных операций с корнем, здесь же вводится понятия иррационального выражения (в общеобразовательном классе этот пункт не изучается). После введения понятия корня n-й степени учащиеся рассматривают функцию $y = \sqrt[n]{x}$. При углубленном изучении курса учащиеся изучают вопрос об иррациональности чисел вида $\sqrt[n]{a}$, в связи с чем знакомятся с теоремой о рациональных корнях алгебраических уравнений с целыми коэффициентами. Эта теорема используется в дальнейшем для формулировки приемов подбора рациональных корней уравнения при понижении порядка уравнений высших степеней (п. 4.4.3).

При изучении второго параграфа девятиклассники применяют изученные понятия при решении простейших иррациональных уравнения и неравенств. В общеобразовательном классе рекомендуется ограничиться только рассмотрением иррациональных уравнений. При изучении иррациональных неравенств более подготовленные учащиеся могут научиться решать и более сложные неравенства, требующие рассмотрения ОДЗ неравенства или использования метода замены неизвестного.

Третий параграф посвящен расширению понятия степени. К моменту его изучения учащиеся владеют понятием степени с основанием $a \in \boldsymbol{R}$ и показателем $n \in \boldsymbol{N}_0$. Сначала известное им определение расширяется на случай целого отрицательного показателя, затем на случай дробного показателя, таким образом, понятие степени расширяется до понятия степени с рациональным показателем. При углубленном изучении курса учащиеся рассматривают функцию $y = kx^n$ с рациональным показателем n. Познакомившись с понятием степени с рациональным показателем, девятиклассники решают уравнения, содержащие неизвестное в рациональной степени.

Четвертый параграф посвящен решению уравнений и неравенств высших степеней. Здесь учащиеся уточняют и систематизируют имеющиеся у них знания о решении уравнений высших степеней (решение биквадратных уравнений, неполных уравнений n-ой степени вида $a_0x^n + a_1 = 0$; решение уравнений с применением разложения на множители) и знакомятся с новыми методами решения уравнений (метод решения возвратного уравнения четвертой степени, метод понижения порядка уравнения с применением следствия теоремы Безу, применение формул сокращенного умножения высших степеней). В итоге учащиеся фиксируют два основных приема, которые помогают при решении уравнений высших степеней: замена неизвестного и разложение на множители. Здесь же рассматривается вопрос использования этих приемов при решении неравенств высших степеней. При изучении этого материала основное внимание уделяется повторению метода интервалов.

Заметим, что при углубленном изучении курса учащиеся, уточняя и расширяя свои знания об общих формулах сокращенного умножения, выводят формулу бинома Ньютона и учатся ее использовать.

В пятом параграфе учащиеся учатся решать системы нелинейных уравнений. Сначала они решают системы нелинейных уравнений, для которых работают уже известные им способы подстановки и алгебраического сложения. Далее они учатся решать системы введением нового неизвестного (новых неизвестных), в том числе рассматривают системы с полным однородным уравнением второй степени и симметрические системы. В общеобразовательном классе системы последних двух видов можно не изучать.

Последний параграф посвящен вопросу приближенного решения уравнений. Сначала учащиеся знакомятся с понятиями абсолютной и относительной погрешности и учатся их вычислять. При углубленном изучении курса девятиклассники учатся оценивать погрешность суммы, разности, произведения и частного, а также знакомятся с методом половинного деления для нахождения приближенного решения уравнения.

Характеристика деятельности учащихся

При изучении содержания четвертой главы учащиеся:

• *применяют* изученные способы действий для решения задач в типовых и поисковых ситуациях;

• *обосновывают* правильность выполненного действия с помощью обращения к общему алгоритму, определению, свойству;

• *анализируют* графики функций $y=\sqrt[n]{x}$ и $y = x^n$ с целью выявления их свойств;

• *сопоставляют* графики и свойства функции $y = x^n$ при различных значениях показателя;

• *повторяют и систематизируют* знания о графике функций вида $y = x^n$ при различных значениях показателя;

• *применяют известное определение* корня n-й степени для построения способа решения иррациональных уравнений;

• *расширяют известное понятие степени*, пользуясь фундаментальным принципом развития математической теории;

• *применяют свойства* корня n-й степени и свойства степеней для преобразования выражений;

• *повторяют и систематизируют* известные способы решения уравнений высших степеней;

• *строят способ действия* для решения нового типа уравнений;

• *применяют метод* замены неизвестного и метод разложения на множители для решения уравнений и неравенств высших степеней.

• *анализируют* уравнения и неравенства с целью поиска возможности упрощения их решения;

• *применяют уже известные аналитические способы* решения систем линейных уравнений для решения систем нелинейных уравнений;

• *применяют метод* замены неизвестного для решения систем нелинейных уравнений;

• *применяют* формулы сокращенного умножения при решении уравнений и упрощении иррациональных выражений;

• *применяют следствие теоремы Безу* для понижения степени уравнения при решении уравнений высших степеней;

• *применяют формулы* для вычисления погрешностей;

• *записывают* способы действий с помощью алгоритмов, выбирают алгоритм и используют его для выполнения различных задач;

• *применяют полученные знания* для решения задач практической направленности.

Особенности изучения учебного содержания

При изучении четвертой главы планированием предусмотрены уроки ОНЗ, структура которых обеспечивает выполнение учащимися целого комплекса универсальных учебных действий. Рассмотрим способ организации урока ОНЗ на примере содержания пункта 4.1.1 “Корни высших степеней”.

В этом пункте учащиеся знакомятся с понятием корня n-й степени и арифметического корня n-й степени. Далее учащиеся знакомятся с основными свойствами корней n-й степени, на основании которых учатся преобразовывать числовые и буквенные выражения со знаком корня n-й степени.

Урок открытия новых знаний выстраивается в соответствии с требованиями технологии деятельностного метода Л. Г. Петерсон (см. раздел Приложение). На этапе *мотивации* учитель может предложить учащимся обсудить эпиграф к пункту, уточняя, что означает понятие аналогии. После чего учитель может попросить учащихся предположить, какие же методы будут использоваться ими на сегодняшнем уроке. После чего учитель сообщает, что учащиеся сегодня при изучении нового материала им будет помогать аналогия с хорошо знакомым понятием квадратного корня.

После чего учитель организует актуализацию нужных для открытия знаний с помощью выполнения заданий (№ 1 — № 3). Для проблематизации и **самостоятельного открытия** понятия кубического корня рекомендуется использовать задания № 3 — № 4. Для проблематизации и **самостоятельного открытия** понятия корня n-й степени и арифметического корня n-й степени рекомендуется использовать задание № 5.

Рассмотрим пример *структуры открытия нового знания.*

1. Новое знание: понятие кубического корня

2. Актуализация.

Повторить: понятие арифметического квадратного корня, понятие и свойство степени с четным и нечетным показателем.

3. Задание на пробное действие.

Заполните таблицу из № 4 учебника.

4. Фиксация затруднения.

Я не могу записать числа, кубы которых равны a, (a не является точным кубом числа).

Я не могу обосновать, что заполнил таблицу верно.

5. Фиксация причины затруднения.

Не известно, как записать в общем виде действительное число x, такое что $x^3 = a$.

6. Цель учебной деятельности.

Расширить понятие числа.

7. Фиксация нового знания.

Учащиеся должны построить понятие кубического корня.

Открыть новое знание учащиеся могут, воспользовавшись аналогией с понятием квадратного корня. Свою гипотезу они самостоятельно проверяют с использованием текста учебника

Далее учитель знакомит учащихся с понятием с понятием корня n-й степени и арифметического корня n-й степени. На *этапе первичного закрепления* рекомендуется выполнить задание № 8 — № 9, для *самостоятельной работы* учащимся можно предложить аналогичные задания.

Далее в зависимости от количества уроков, отведенных на изучение этого пункта, можно перейти к рассмотрению свойств корня и их применению (№ 10 — № 13) либо сразу к повторению ранее изученного материала. В общеобразовательном классе рекомендуется организовать отдельный урок по открытию (№ 6 — № 7) и применению свойств корня (№ 10 — № 15).

Для *повторения* рекомендуется выполнить одно или несколько заданий из соответствующего раздела. На этапе *рефлексии* учащимся предлагается оценить процесс и результат своей работы на уроке.

Кроме урока открытия нового знания, основные структурные элементы которого рассмотрены выше, планированием предусмотрены и другие типы уроков: *уроки рефлексии тренировочного и коррекционного типа*, где учащиеся вырабатывают и закрепляют свое умение применять новые понятия и способы действий, учатся самостоятельно выявлять и исправлять свои ошибки, корректировать свою учебную деятельность.

В течение изучения четвертой главы учащимся предлагается три экспресс-теста, которые можно использовать для урока рефлексии или в качестве домашней работы.

Планированием также предусмотрены и уроки *обучающего контроля*. Перед проведением контрольной работы рекомендуется провести урок рефлексии с использованием содержания соответствующего раздела “Задачи для самоконтроля”.

§ 1. Развитие понятия корня

П. 4.1.1. Корни высших степеней

Основные содержательные цели.

1) Сформировать понятие кубического корня, корня n-й степени, арифметического корня n-й степени.

2) Познакомить учащихся со свойствами корня n-й степени и сформировать умение их применять.

3) Тренировать умение находить сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Закрепить умение изображать на плоскости решение уравнения с двумя неизвестными.

Для **самостоятельного открытия** понятия кубического корня рекомендуется выполнить № 3 — № 4. Выполнение задания № 1 (а, в) готовит учащихся к этому открытию.

Для **самостоятельного открытия** понятия корня n-й степени арифметического корня n-й степени можно использовать задание № 5. Выполнение заданий № 1 (а, в, ж, з), № 2 готовит учащихся к этому открытию.

Для **самостоятельного открытия** простейших свойств n-й степени рекомендуется выполнить № 6 или № 7. Выполнение заданий № 1 (б, г) готовит учащихся к этим открытиям.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 8.

Задание выполняется по определению арифметического корня n-й степени из неотрицательного числа (n – четное натуральное число).

$\sqrt[8]{8^8} = 8$, так как $8 \geqslant 0$ и $8^8 = 8^8$;

$\sqrt[6]{(-6)^6}=6$, так как $6 \geqslant 0$ и $6^6 = (-6)^6$;

$\sqrt[4]{256}=4$, так как $4 \geqslant 0$ и $4^4 = 256$;

$\sqrt[6]{729}=3$, так как $3 \geqslant 0$ и $3^6 = 729$;

$\sqrt[4]{10000}=10$, так как $10 \geqslant 0$ и $10^4 = 10\,000$;

$\sqrt[4]{0{,}0016}=0{,}2$, так как $0{,}2 \geqslant 0$ и $0{,}2^4 = 0{,}0016$;

$\sqrt[6]{\frac{15625}{4096}}=\frac{5}{4}$, так как $\frac{5}{4} \geqslant 0$ и $\left(\frac{5}{4}\right)^6=\frac{15625}{4096}$.

№ 9.

$\sqrt[9]{27^3}=\sqrt[9]{(3^3)^3}=\sqrt[9]{3^9}=3$;

$\sqrt[7]{(-7)^7}=-7$;

$\sqrt[3]{216}=6$, так как $6^3 = 216$;

$\sqrt[5]{-32}=-2$, так как $(-2)^5 = -32$;

$\sqrt[7]{2187}=3$, так как $3^7 = 2\,187$;

$\sqrt[3]{-0{,}343}=-0{,}7$, так как $(-0{,}7)^3 = -0{,}343$;

$\sqrt[5]{\frac{3125}{7776}}=\frac{5}{6}$, так как $\left(\frac{5}{6}\right)^5=\frac{3125}{7776}$.

№ 10.

$\sqrt[16]{a^8}=\sqrt[2\cdot 8]{a^8}=\sqrt{|a|}$ при всех $a \in \boldsymbol{R}$ (по свойству **V**);

$\sqrt[3]{a^9}=\sqrt[3]{a^{3\cdot 3}}=a^3$ (по свойству **III**);

$\sqrt[4]{a^{20}}=\sqrt[4]{(a^5)^4}=|a^5|=|a|^5$ (по свойству **III**);

$\sqrt[5]{a^{30}}=\sqrt[5]{(a^6)^5}=a^6$ (по свойству **III**);

$\sqrt[4]{a}\cdot\sqrt[4]{a^3}=\sqrt[4]{a\cdot a^3}=\sqrt[4]{a^4}=|a|=a$ (по свойствам **I**, **III** и по условию $a \geqslant 0$, так как $\sqrt[4]{a}$ существует только из неотрицательного числа);

$\frac{\sqrt[6]{a^4}}{\sqrt[6]{a}}=\sqrt[6]{\frac{a^4}{a}}=\sqrt[6]{a^3}=\sqrt[3\cdot 2]{a^3}=\sqrt{a}$ (по свойству **II** и свойству **V**, так как по условию $a>0$).

№ 11.

При выполнении задания применяется свойство **IV**.

$\sqrt[5]{\sqrt[7]{a}}=\sqrt[35]{a}$; $\sqrt[3]{\sqrt[4]{a}}=\sqrt[12]{a}$, так как исходное выражение имеет смысл при $a \geqslant 0$; $\sqrt[3]{\sqrt{a}}=\sqrt[6]{a}$, так как исходное выражение имеет смысл при $a \geqslant 0$.

№ 12.

При выполнении задания применяется свойство **V**.

$\sqrt[24]{a^{18}}=\sqrt[4\cdot 6]{a^{3\cdot 6}}=\sqrt[4]{|a|^3}$ при всех $a \in \boldsymbol{R}$;

$\sqrt[16]{a^{40}}=\sqrt[2\cdot 8]{a^{5\cdot 8}}=\sqrt{|a|^5}$ при всех $a \in \boldsymbol{R}$;

$\sqrt[30]{a^{20}}=\sqrt[3\cdot 10]{a^{2\cdot 10}}=\sqrt[3]{a^2}$ при всех $a \in \boldsymbol{R}$;

$\sqrt[15]{a^{100}}=\sqrt[3\cdot 5]{a^{20\cdot 5}}=\sqrt[3]{a^{20}}$ при всех $a \in \boldsymbol{R}$.

№ 13.

а) $\sqrt[3]{100} > \sqrt[6]{1000}$, так как по свойству **VI** корня n-й степени $\sqrt[3]{100} = \sqrt[3\cdot 2]{100^{1\cdot 2}} = \sqrt[6]{10000}$, а также по свойству **VII** (10 000 > 1 000);

б) $\sqrt[3]{\sqrt{10}} > \sqrt{\sqrt[3]{9}}$, так как по свойству **IV** корня n-й степени $\sqrt[3]{\sqrt{10}} = \sqrt[6]{10}$ и $\sqrt{\sqrt[3]{9}} = \sqrt[6]{9}$, а также по свойству **VII** (10 > 9);

в) $\sqrt[4]{0{,}987} < \sqrt[10]{1{,}234}$, так как при возведении данных чисел в 20-ю степень: $\left(\sqrt[4]{0{,}987}\right)^{20} = 0{,}987^5 < 1$, $\left(\sqrt[10]{1{,}234}\right)^{20} = 1{,}234^2 > 1$, то есть $0{,}987^5 < 1{,}234^2$. Значит, по свойству **VII** $\sqrt[20]{0{,}987^5} < \sqrt[20]{1{,}234^2}$;

г) $\sqrt[3]{9} < \sqrt{5}$, так как при возведении данных чисел в 6-ю степень: $\left(\sqrt[3]{9}\right)^6 = 9^2 = 81$, $\left(\sqrt{5}\right)^6 = 5^3 = 125$. Так как 81 < 125, то по свойству **VII** $\sqrt[6]{81} < \sqrt[6]{125}$;

д) $\sqrt{10} > \sqrt[3]{30}$, так как при возведении данных чисел в 6-ю степень: $\left(\sqrt{10}\right)^6 = 10^3 = 1000$, $\left(\sqrt[3]{30}\right)^6 = 30^2 = 900$. Так как 1 000 > 900 то, по свойству **VII** $\sqrt[6]{1000} > \sqrt[6]{900}$;

е) $-\sqrt[4]{5} < -\sqrt[8]{10\sqrt{6}}$.

Сравним модули данных чисел $\sqrt[4]{5}$ и $\sqrt[8]{10\sqrt{6}}$. Возведем оба числа 16-ю степень:

$\left(\sqrt[4]{5}\right)^{16} = 5^4 = 625$, $\left(\sqrt[8]{10\sqrt{6}}\right)^{16} = \left(\sqrt[8]{10}\right)^{16} \cdot \left(\sqrt[16]{6}\right)^{16} = 10^2 \cdot 6 = 600$. Так как 625 > 600, то по свойству **VII** $\sqrt[16]{625} > \sqrt[16]{600}$, $\sqrt[4]{5} > \sqrt[16]{600}$. Тогда $-\sqrt[4]{5} < -\sqrt[8]{10\sqrt{6}}$.

№ 14.

а) Подбираем целое число, куб которого не превосходит 100:
$3^3 = 27$ (подходит), $4^3 = 64$ (подходит), $5^3 = 125$ (не подходит).

Значит, $4 = \sqrt[3]{64}$ — наибольшее целое, не превосходящее $\sqrt[3]{100}$ (свойство **VII**).
б) Подбираем целое число, седьмая степень которого не превосходит 1 234:
$1^7 = 1$ (подходит), $2^7 = 128$ (подходит), $3^7 = 2\,187$ (не подходит).

Значит, $2 = \sqrt[7]{128}$ — наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt[7]{1234}$ (свойство **VII**).
в) Подбираем целое число, четвертая степень которого не превосходит 600:
$3^4 = 81$ (подходит), $4^4 = 256$ (подходит), $5^4 = 625$ (не подходит).

Значит, $4 = \sqrt[4]{256}$ — наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt[4]{600}$ (свойство **VII**).
г) Подбираем целое число, пятая степень которого не превосходит –463:
$(-1)^5 = -1$ (не подходит), $(-2)^5 = -32$ (не подходит), $(-3)^5 = -243$ (не подходит),

$(-4)^5 = -1\,024$ (подходит), Значит, $-4 = \sqrt[5]{-1024}$ — наибольшее целое число, не превосходящее $\sqrt[5]{-463}$ (свойство **VII**).

№ 15.

Преобразуем исходное выражение, применяя свойства **I**, **II** корня n-й степени, а также выполняя почленное деление числителя дробного выражения на знаменатель:

$$0{,}5 \cdot \sqrt[3]{48} \cdot \sqrt[3]{1\frac{1}{3}} - \frac{\sqrt[3]{5} - \sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}} = 0{,}5 \cdot \sqrt[3]{48 \cdot \frac{4}{3}} - \left(\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}} - \frac{\sqrt[3]{625}}{\sqrt[3]{5}}\right) = 0{,}5 \cdot \sqrt[3]{64} - 1 + \sqrt[3]{125} =$$

$$= 0{,}5 \cdot 4 - 1 + 5 = 6.$$

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 27*.

Предположим, что такое число существует. Сложив данные три целых числа, получим x. Значит, x — целое число. Но тогда и $\sqrt{x^2+2}$ обязано быть целым. Корень из числа является целым, только если под корнем стоит точный квадрат. Значит, $x^2 + 2$ — точный квадрат. Но нет двух точных квадратов, различающихся ровно на 2.

Ответ: не существует.

П. 4.1.2. Преобразование выражений, содержащих корни *n*-й степени

Основные содержательные цели.

1) Сформировать умение выполнять преобразование выражений, содержащих корни n-й степени: внесение множителя под знак корня, вынесение множителя из-под корня, приведение радикалов к общему показателю, освобождение от иррациональности в знаменателе (числителе).

2) Тренировать умение применять свойства корня n-й степени. Закрепить умение изображать на плоскости решение уравнения с двумя неизвестными; выполнять преобразования выражений с арифметическим квадратным корнем.

Для актуализации свойств корня n-й степени можно выполнить № 28. Для **самостоятельного открытия** способа вынесение множителя из-под корня рекомендуется выполнить № 30 — № 31. Для **самостоятельного открытия** способа приведения радикалов к общему показателю рекомендуется выполнить № 29, № 32.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 33.

а) $\sqrt[4]{2000}=\sqrt[4]{16\cdot125}=\sqrt[4]{2^4}\cdot\sqrt[4]{125}=2\sqrt[4]{125}$;

б) $\sqrt[5]{96}=\sqrt[5]{32\cdot3}=\sqrt[5]{2^5}\cdot\sqrt[5]{3}=2\sqrt[5]{3}$;

в) $\sqrt[3]{-250}=\sqrt[3]{-125\cdot2}=\sqrt[3]{(-5)^3}\cdot\sqrt[3]{2}=-5\sqrt[3]{2}$;

г) $\sqrt[3]{\dfrac{625}{243}}=\sqrt[3]{\dfrac{125\cdot5}{27\cdot9}}=\dfrac{\sqrt[3]{5^3}\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{3^3}\cdot\sqrt[3]{9}}=\dfrac{5}{3}\cdot\sqrt[3]{\dfrac{5}{9}}=\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{9}\cdot\sqrt[3]{3}}=\dfrac{5}{3}\cdot\dfrac{\sqrt[3]{15}}{\sqrt[3]{3^3}}=\dfrac{5}{9}\cdot\sqrt[3]{15}$;

д) $\sqrt[6]{\dfrac{128}{125}}=\sqrt[6]{\dfrac{64\cdot2}{125}}=\dfrac{\sqrt[6]{2^6}\cdot\sqrt[6]{2}}{\sqrt[6]{125}}=2\cdot\sqrt[6]{\dfrac{2}{125}}=2\cdot\sqrt[6]{\dfrac{2\cdot125}{125\cdot125}}=2\cdot\sqrt[6]{\dfrac{250}{(5^3)^2}}=2\cdot\dfrac{\sqrt[6]{250}}{\sqrt[6]{5^6}}=\dfrac{2}{5}\cdot\sqrt[6]{250}.$

№ 34.

а) $\sqrt[3]{128a^5b^4}=\sqrt[3]{64\cdot2\cdot a^3\cdot a^2\cdot b^3\cdot b}=\sqrt[3]{4^3}\cdot\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{a^3}\cdot\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{b^3}\cdot\sqrt[3]{b}=4ab\sqrt[3]{2a^2b}$;

б) $\sqrt[5]{-512x^6y^{15}}=\sqrt[5]{(-2)^5\cdot16\cdot x^5\cdot x\cdot(y^3)^5}=\sqrt[5]{(-2)^5}\cdot\sqrt[5]{16}\cdot\sqrt[5]{x^5}\cdot\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{(y^3)^5}=-2xy^3\sqrt[5]{16x}$;

в) $\sqrt[7]{\dfrac{4096a^{10}}{b^{35}}}=\dfrac{\sqrt[7]{2^7\cdot32\cdot a^7\cdot a^3}}{\sqrt[7]{(b^5)^7}}=\dfrac{\sqrt[7]{2^7}\cdot\sqrt[7]{32}\cdot\sqrt[7]{a^7}\cdot\sqrt[7]{a^3}}{b^5}=\dfrac{2a}{b^5}\cdot\sqrt[7]{32a^3}$;

г) $\sqrt[4]{81a^9}=\sqrt[4]{3^4\cdot a^8\cdot a}=\sqrt[4]{3^4}\cdot\sqrt[4]{(a^2)^4}\cdot\sqrt[4]{a}=3a^2\sqrt[4]{a}$;

д) $\sqrt[4]{49a^9b^5}=\sqrt[4]{7^2\cdot a^8\cdot a\cdot b^4\cdot b}=\sqrt[4]{49}\cdot\sqrt[4]{(a^2)^4}\cdot\sqrt[4]{ab}\cdot\sqrt[4]{b^4}=a^2\cdot|b|\cdot\sqrt[4]{49ab}$, исходное и конечное выражения определены, если числа a, b одного знака или одно из них обращается в нуль, то есть при $ab \geqslant 0$, поэтому при выполнении задания следует следить, чтобы проводя промежуточные преобразования учащиеся не записывали выражения вида $\sqrt[4]{a}$ или $\sqrt[4]{b}$ (так как, если одна из переменных обращается в ноль, например, $a = 0$, то корень $\sqrt[4]{ab}$ определен, а корень $\sqrt[4]{b}$ нет).

№ 35.

а) $3\sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{3^4} \cdot \sqrt[4]{2} = \sqrt[4]{81 \cdot 2} = \sqrt[4]{162}$;

б) $-7\sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{(-7)^3} \cdot \sqrt[3]{2} = \sqrt[3]{-343 \cdot 2} = \sqrt[3]{-686}$;

в) $-4\sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{4^4} \cdot \sqrt[4]{3} = -\sqrt[4]{256 \cdot 3} = -\sqrt[4]{768}$;

г) $6\sqrt[5]{\dfrac{3}{64}} = \sqrt[5]{6^5} \cdot \sqrt[5]{\dfrac{3}{64}} = \sqrt[5]{\dfrac{2^5 \cdot 3^5 \cdot 3}{64}} = \sqrt[5]{\dfrac{729}{2}}$.

№ 36.

а) $4a^2b\sqrt[3]{a^4b} = \sqrt[3]{4^3} \cdot \sqrt[3]{(a^2)^3} \cdot \sqrt[3]{b^3} \cdot \sqrt[3]{a^4b} = \sqrt[3]{64 \cdot a^6 \cdot b^3 \cdot a^4b} = \sqrt[3]{64a^{10}b^4}$;

б) $-3x^3y^4\sqrt[7]{xy^6} = \sqrt[7]{(-3)^7} \cdot \sqrt[7]{(x^3)^7} \cdot \sqrt[7]{(y^4)^7} \cdot \sqrt[7]{xy^6} = \sqrt[7]{-2187 \cdot x^{21} \cdot y^{28} \cdot xy^6} =$
$= \sqrt[7]{-2187x^{22}y^{34}}$;

в) $-xyz\sqrt[3]{\dfrac{x^4}{yz^2}} = \sqrt[3]{(-x)^3} \cdot \sqrt[3]{y^3} \cdot \sqrt[3]{z^3} \cdot \sqrt[3]{\dfrac{x^4}{yz^2}} = \sqrt[3]{\dfrac{-x^3 \cdot y^3 \cdot z^3 \cdot x^4}{yz^2}} = \sqrt[3]{-x^7y^2z}$;

г) Так как исходное выражение определено при $x \geqslant 0$:

$x^2\sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{(x^2)^4} \cdot \sqrt[4]{x^3} = \sqrt[4]{x^8 \cdot x^3} = \sqrt[4]{x^{11}}$.

д) Так как исходное выражение определено при $y \leqslant 0$:

$y^3\sqrt[6]{-y} = -\sqrt[6]{(y^3)^6} \cdot \sqrt[6]{-y} = -\sqrt[6]{y^{18} \cdot (-y)} = -\sqrt[6]{-y^{19}}$;

и) Исходное выражение определено при $a \geqslant 0$ и $b \neq 0$. При этом, если $a = 0$ и $b \neq 0$, то исходное выражение равно нулю. Если $a \neq 0$, то $b = |b| = \sqrt[6]{b^6}$ при $b > 0$ и $b = -|b| = -\sqrt[6]{b^6}$ при $b < 0$, получаем:

$$-a^2b\sqrt[6]{\frac{a^5}{b^2}} = \begin{cases} -\sqrt[6]{(a^2)^6 \cdot b^6 \cdot \dfrac{a^5}{b^2}}, & b > 0, \quad a > 0 \\ \sqrt[6]{(a^2)^6 \cdot b^6 \cdot \dfrac{a^5}{b^2}}, & b < 0, \quad a > 0 \end{cases} = \begin{cases} -\sqrt[6]{a^{17} \cdot b^4}, & b > 0, \quad a > 0 \\ \sqrt[6]{a^{17} \cdot b^4}, & b < 0, \quad a > 0 \end{cases}.$$

№ 37.

Задание выполняется с помощью приведения радикалов к общему показателю.

а) Наименьшее общее кратное чисел 4, 5 и 6 равно 30, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 30:

$$\sqrt[5]{4} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt[6]{32}} = \sqrt[30]{4^6} \cdot \frac{\sqrt[30]{2^{15}}}{\sqrt[30]{32^5}} = \sqrt[30]{\frac{2^{12} \cdot 2^{15}}{2^{25}}} = \sqrt[30]{2^2} = \sqrt[15]{2};$$

б) Наименьшее общее кратное чисел 4 и 5 равно 20, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 20:

$$\sqrt[4]{3} \cdot \sqrt[5]{-\frac{5}{12}} = \sqrt[20]{3^5} \cdot \left(-\sqrt[20]{\left(\frac{5}{12}\right)^4}\right) = -\sqrt[20]{\frac{3^5 \cdot 5^4}{(3 \cdot 4)^4}} = -\sqrt[20]{\frac{3 \cdot 5^4}{4^4}} = -\sqrt[20]{\frac{1875}{256}};$$

в) Наименьшее общее кратное чисел 6, 8 и 4 равно 24, поэтому выражение можно привести к одному корню степени 24:

$$\frac{\sqrt[6]{32}}{\sqrt[8]{18}}\cdot\sqrt[4]{\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt[24]{32^4}}{\sqrt[24]{18^3}}\cdot\sqrt[24]{\left(\frac{3}{4}\right)^6}=\sqrt[24]{\frac{2^{20}\cdot 3^6}{2^3\cdot 3^6\cdot 2^{12}}}=\sqrt[24]{2^5}=\sqrt[24]{32}\ .$$

№ 38.

а) $\frac{6}{\sqrt[3]{9}}=\frac{6\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^2}\cdot\sqrt[3]{3}}=\frac{6\cdot\sqrt[3]{3}}{\sqrt[3]{3^3}}=\frac{6\cdot\sqrt[3]{3}}{3}=2\sqrt[3]{3}$;

б) $\frac{10}{\sqrt[4]{32}}=\frac{10}{\sqrt[4]{2^4\cdot 2}}=\frac{10\cdot\sqrt[4]{2^3}}{2\sqrt[4]{2}\cdot\sqrt[4]{2^3}}=\frac{5\cdot\sqrt[4]{2^3}}{\sqrt[4]{2^4}}=\frac{5\cdot\sqrt[4]{2^3}}{2}=2{,}5\sqrt[4]{8}$;

в) $\frac{3}{\sqrt[3]{-7}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{(-7)^2}}{\sqrt[3]{-7}\cdot\sqrt[3]{(-7)^2}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{(-7)^2}}{\sqrt[3]{(-7)^3}}=\frac{3\cdot\sqrt[3]{49}}{-7}=-\frac{3\cdot\sqrt[3]{49}}{7}$;

г) $\frac{abc}{\sqrt[6]{c^7}}=\frac{abc}{\sqrt[6]{c^6\cdot c}}=\frac{abc\cdot\sqrt[6]{c^5}}{c\sqrt[6]{c}\cdot\sqrt[6]{c^5}}=\frac{ab\sqrt[6]{c^5}}{\sqrt[6]{c^6}}=\frac{ab\sqrt[6]{c^5}}{c}$, так как исходное выражение определено при $c > 0$.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 51.*

Возведем правую часть равенства в квадрат:

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\pm 2\sqrt{\left(\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\right)\left(\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\right)}+$$
$$+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}=a\pm 2\sqrt{\frac{a^2-(a^2-b)}{4}}=a\pm\sqrt{b}.$$

П. 4.1.3.* Более сложные преобразования выражений, содержащих корни

Основные содержательные цели.

1) Сформировать умение выполнять преобразование выражений, содержащих корни n-й степени, основанные на использовании формул сокращенного умножения и комбинировании уже известных операций с корнем,

2) Тренировать умение выполнять преобразование выражений, содержащих корни n-й степени. Закрепить умение находить область определения функции, множество значений функции, строить графики функции.

Для **самостоятельного открытия** способа избавления от иррациональности в знаменателе с помощью формул сокращенного умножения рекомендуется выполнить № 56. Предыдущие задания пункта готовят учащихся к этому открытию.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 55.

а) $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)^2}{\left(\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=\frac{2-2\sqrt{10}+5}{5-2}=\frac{7-2\sqrt{10}}{3}$;

б) $\frac{12}{x+2\sqrt{3}}=\frac{12\left(x-2\sqrt{3}\right)}{\left(x+2\sqrt{3}\right)\left(x-2\sqrt{3}\right)}=\frac{12x-24\sqrt{3}}{x^2-12}$.

№ 56.

а) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}}=\dfrac{\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\cdot4}+\sqrt[3]{4^2}}{\left(\sqrt[3]{5}-\sqrt[3]{4}\right)\left(\sqrt[3]{5^2}+\sqrt[3]{5\cdot4}+\sqrt[3]{4^2}\right)}=\dfrac{\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}}{5-4}=\sqrt[3]{25}+\sqrt[3]{20}+\sqrt[3]{16}$;

б) $\dfrac{2}{2-\sqrt[3]{3}}=\dfrac{2\left(2^2+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}{\left(2-\sqrt[3]{3}\right)\left(2^2+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{3^2}\right)}=\dfrac{2\left(4+2\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{9}\right)}{8-3}=\dfrac{8+4\sqrt[3]{3}+2\sqrt[3]{9}}{5}$;

в) *Первый способ:*

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}{\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)}=\frac{\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}{3-2}=\left(\sqrt[4]{3}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right).$$

Второй способ:

$$\frac{1}{\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}}=\frac{\sqrt[4]{3^3}+\sqrt[4]{3^2\cdot2}+\sqrt[4]{3\cdot2^2}+\sqrt[4]{2^3}}{\left(\sqrt[4]{3}-\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{3^3}+\sqrt[4]{3^2\cdot2}+\sqrt[4]{3\cdot2^2}+\sqrt[4]{2^3}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{8}}{3-2}=\sqrt[4]{27}+\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{12}+\sqrt[4]{8}.$$

№ 57.

а) $\dfrac{6}{\sqrt[3]{4}-1}=\dfrac{6\left(\sqrt[3]{4^2}+\sqrt[3]{4}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{4}-1\right)\left(\sqrt[3]{4^2}+\sqrt[3]{4}+1\right)}=\dfrac{6\left(\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{4}+1\right)}{4-1}=2\left(2\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{4}+1\right)=$

$=4\sqrt[3]{2}+2\sqrt[3]{4}+2$.

б) $\dfrac{1-\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{2}+1}=\dfrac{\left(1-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}+1\right)}{\left(\sqrt[3]{2}+1\right)\left(\sqrt[3]{2^2}-\sqrt[3]{2}+1\right)}=\dfrac{\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}+1-2+\sqrt[3]{4}-\sqrt[3]{2}}{2+1}=\dfrac{2\sqrt[3]{4}-2\sqrt[3]{2}-1}{3}$;

в) $\dfrac{\sqrt{3}+4}{\sqrt[4]{3}-2}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+4\right)\left(\sqrt[4]{3}+2\right)}{\left(\sqrt[4]{3}-2\right)\left(\sqrt[4]{3}+2\right)}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+4\right)\left(\sqrt[4]{3}+2\right)}{\sqrt{3}-4}=\dfrac{\left(\sqrt{3}+4\right)^2\left(\sqrt[4]{3}+2\right)}{\left(\sqrt{3}-4\right)\left(\sqrt{3}+4\right)}=$

$=-\dfrac{\left(17+8\sqrt{3}\right)\left(\sqrt[4]{3}+2\right)}{13}$.

Также можно было сразу воспользоваться формулой для разности шестых степеней.

г) $\dfrac{1}{\sqrt[6]{2}-1}=\dfrac{\sqrt[6]{2^5}+\sqrt[6]{2^4}+\sqrt[6]{2^3}+\sqrt[6]{2^2}+\sqrt[6]{2}+1}{\left(\sqrt[6]{2}-1\right)\left(\sqrt[6]{2^5}+\sqrt[6]{2^4}+\sqrt[6]{2^3}+\sqrt[6]{2^2}+\sqrt[6]{2}+1\right)}=$

$=\sqrt[6]{32}+\sqrt[6]{16}+\sqrt[6]{8}+\sqrt[6]{4}+\sqrt[6]{2}+1=\sqrt[6]{32}+\sqrt[3]{4}+\sqrt{2}+\sqrt[3]{2}+\sqrt[6]{2}+1$.

Также можно было последовательно воспользоваться формулами для разности кубов и разности квадратов (в любом порядке).

№ 58.

1) Если $a\neq-1$, то $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}=\dfrac{1+\sqrt[3]{a}}{\left(1+\sqrt[3]{a}\right)\left(1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}\right)}=\dfrac{1+\sqrt[3]{a}}{1+a}$;

2) Если $a=-1$, то $\dfrac{1}{1-\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{a^2}}=\dfrac{1}{1-(-1)+1}=\dfrac{1}{3}$.

Ответ: $\dfrac{1+\sqrt[3]{a}}{1+a}$ при $a\neq-1$; $\dfrac{1}{3}$ при $a=-1$.

№ 59.

$$\frac{1}{\sqrt[3]{49}+\sqrt[3]{35}+\sqrt[3]{25}}=\frac{1}{\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot5}+\sqrt[3]{5^2}}=\frac{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}{\left(\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}\right)\left(\sqrt[3]{7^2}+\sqrt[3]{7\cdot5}+\sqrt[3]{5^2}\right)}=\frac{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}{7-5}=$$

$$=\frac{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}{2}$$

Ответ: $\frac{\sqrt[3]{7}-\sqrt[3]{5}}{2}$.

№ 60.

а) $\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}+2\sqrt[3]{a}}+\frac{2\sqrt[3]{a^2}}{a+2\sqrt[3]{a^2}}=\frac{\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a}\left(\sqrt[3]{a}+2\right)}+\frac{2\sqrt[3]{a^2}}{\sqrt[3]{a^2}\left(\sqrt[3]{a}+2\right)}=\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[3]{a}+2}+\frac{2}{\sqrt[3]{a}+2}=1$.

б) Упростим выражение в скобках:

$$\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[8]{a}}{\sqrt[4]{a\sqrt{a}}-\sqrt[8]{a}}+\frac{\sqrt[8]{a}-1}{\sqrt{\sqrt{a}}-2\sqrt[8]{a}+1}=\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[8]{a}}{\sqrt[8]{a^3}-\sqrt[8]{a}}+\frac{\sqrt[8]{a}-1}{\sqrt[4]{a}-2\sqrt[8]{a}+1}=$$

$$=\frac{\sqrt[8]{a}\left(\sqrt[8]{a}-1\right)}{\sqrt[8]{a}\left(\sqrt[8]{a^2}-1\right)}+\frac{\sqrt[8]{a}-1}{\left(\sqrt[8]{a}-1\right)^2}=\frac{\sqrt[8]{a}-1}{\left(\sqrt[8]{a}-1\right)\left(\sqrt[8]{a}+1\right)}+\frac{1}{\sqrt[8]{a}-1}=$$

$$=\frac{\left(\sqrt[8]{a}-1\right)+\left(\sqrt[8]{a}+1\right)}{\left(\sqrt[8]{a}-1\right)\left(\sqrt[8]{a}+1\right)}=\frac{2\sqrt[8]{a}}{\left(\sqrt[8]{a}-1\right)\left(\sqrt[8]{a}+1\right)}.$$

Поэтому $\left(\frac{\sqrt[4]{a}-\sqrt[8]{a}}{\sqrt[4]{a\sqrt{a}}-\sqrt[8]{a}}+\frac{\sqrt[8]{a}-1}{\sqrt{\sqrt{a}}-2\sqrt[8]{a}+1}\right):\frac{\sqrt[8]{a}}{\sqrt[8]{a}+1}=\frac{2\sqrt[8]{a}}{\left(\sqrt[8]{a}-1\right)\left(\sqrt[8]{a}+1\right)}\cdot\frac{\sqrt[8]{a}+1}{\sqrt[8]{a}}=\frac{2}{\sqrt[8]{a}-1}$.

в) $\left(\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt{b}-\sqrt[4]{ab}}-\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{ab}-\sqrt{a}}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{ab^2}-\sqrt[4]{a^2b}\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=$

$$=\left(\frac{\sqrt[4]{a}}{\sqrt[4]{b}\left(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}\right)}-\frac{\sqrt[4]{b}}{\sqrt[4]{a}\left(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}\right)}\right)\cdot\left(\sqrt[4]{ab}\left(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}\right)\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=$$

$$=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt[4]{ab}\left(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}\right)}\cdot\left(\sqrt[4]{ab}\left(\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}\right)\right)\cdot\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b.$$

Ответ: а) 1; б) $\frac{2}{\sqrt[8]{a}-1}$; в) $a-b$.

№ 61.

Первый способ.

Можно заметить, что

$$5\sqrt{2}+7=2\sqrt{2}+6+3\sqrt{2}+1=\sqrt{2^3}+3\cdot\sqrt{2^2}+3\sqrt{2}+1=\left(\sqrt{2}+1\right)^3.$$

Аналогично, $5\sqrt{2}-7=2\sqrt{2}-6+3\sqrt{2}-1=\sqrt{2^3}-3\cdot\sqrt{2^2}+3\sqrt{2}-1=\left(\sqrt{2}-1\right)^3$.

Поэтому искомое выражение равно $\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}+1\right)^3}-\sqrt[3]{\left(\sqrt{2}-1\right)^3}=\sqrt{2}+1-\sqrt{2}+1=2$.

Второй способ.

Пусть $x=\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}$, $y=\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$. Тогда искомое выражение равно $x-y$.

Рассмотрим выражение $(x-y)^3=x^3-3x^2y+3xy^2-y^3=x^3-y^3-3xy(x-y)=$

$$=5\sqrt{2}+7-5\sqrt{2}+7-3\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}\cdot\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}\cdot(x-y)=14-3\cdot\sqrt[3]{50-49}\cdot(x-y)=14-3(x-y)$$

Значит, $(x-y)^3 = 14 - 3(x-y)$ и искомое выражение $x-y$ удовлетворяет уравнению $t^3 = 14 - 3t$, то есть $t^3 + 3t - 14 = 0$.

Разложив на множители левую часть уравнения, получим:

$t^3 - 8 + 3t - 6 = (t-2)(t^2 + 2t + 4) + 3(t-2) = (t-2)(t^2 + 2t + 7)$.

Так как квадратный трехчлен $t^2 + 2t + 7$ не имеет корней ($D < 0$), то уравнение $t^3 + 3t - 14 = 0$ имеет единственный корень $t = 2$. Поэтому искомое выражение равно 2.

Ответ: 2.

№ 62.

Заметим, что

$$t+6\sqrt{t-9}=9+2\cdot 3\cdot\sqrt{t-9}+t-9=\left(3+\sqrt{t-9}\right)^2,$$

$$t-6\sqrt{t-9}=9-2\cdot 3\cdot\sqrt{t-9}+t-9=\left(3-\sqrt{t-9}\right)^2.$$

Поэтому $\sqrt{t+6\sqrt{t-9}}+\sqrt{t-6\sqrt{t-9}}=\left|3+\sqrt{t-9}\right|+\left|3-\sqrt{t-9}\right|=3+\sqrt{t-9}+3-\sqrt{t-9}=6$, предпоследнее равенство справедливо в силу ограничений на t.

Ответ: 6.

№ 63.

$$\sqrt[3]{6+\sqrt{\frac{847}{27}}}+\sqrt[3]{6-\sqrt{\frac{847}{27}}}=a \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 6+\sqrt{\frac{847}{27}}+3\sqrt[3]{\left(6+\sqrt{\frac{847}{27}}\right)^2\cdot\left(6-\sqrt{\frac{847}{27}}\right)}+3\sqrt[3]{\left(6+\sqrt{\frac{847}{27}}\right)\cdot\left(6-\sqrt{\frac{847}{27}}\right)^2}+6-\sqrt{\frac{847}{27}}=a^3\ \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 3a\sqrt[3]{\left(6+\sqrt{\frac{847}{27}}\right)\cdot\left(6-\sqrt{\frac{847}{27}}\right)}=a^3-12\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad 3a\sqrt[3]{36-\frac{847}{27}}=a^3-12\quad\Leftrightarrow\quad 3a\sqrt[3]{\frac{125}{27}}=a^3-12\quad\Leftrightarrow\quad a^3-5a-12=0\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad a^3-5a-12=a^3-27-5a+15=(a-3)(a^2+3a+9)-5(a-3)=(a-3)(a^2+3a+4)=0\,.$$

Второй множитель не может равняться нулю. Значит, $a = 3$, ч.т.д.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартных задач** данного пункта.

№ 74*.

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{\left(\sqrt{1}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt{1}\right)}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)}+\ldots+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{\left(\sqrt{99}+\sqrt{100}\right)\left(\sqrt{100}-\sqrt{99}\right)}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1}}{2-1}+\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{3-2}+\ldots+\frac{\sqrt{100}-\sqrt{99}}{100-99}=\sqrt{2}-\sqrt{1}+\sqrt{3}-\sqrt{2}+\ldots+\sqrt{100}-\sqrt{99}=$$

$$=\sqrt{100}-\sqrt{1}=10-1=9\,.$$

Ответ: 9.

№ 75*.

Обе части равенства положительны, поэтому:

$$\sqrt[4]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}-\sqrt[4]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}=1\quad\Leftrightarrow\quad\sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}-2\sqrt[4]{\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)}+\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}=1\quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}-2\sqrt[4]{\frac{49-45}{4}}+\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}=1 \Leftrightarrow \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}}+\sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}}=3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{7+3\sqrt{5}}{2}+2\sqrt{\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)}+\frac{7-3\sqrt{5}}{2}=9 \Leftrightarrow 7+2=9.$$

П. 4.1.4. Функция $y=\sqrt[n]{x}$ и ее график

Основные содержательные цели.

1) Познакомить учащихся с функцией $y=\sqrt[n]{x}$ и выявить ее свойства.

2) Тренировать умение выполнять преобразование выражений, содержащих корни n-й степени. Закрепить определять промежутки возрастания и убывания функции.

Для **самостоятельного** знакомства с функцией $y=\sqrt[n]{x}$ и выявления ее свойств рекомендуется выполнить № 78 — № 79. Для подготовки этого открытия можно выполнить № 76 — № 77.

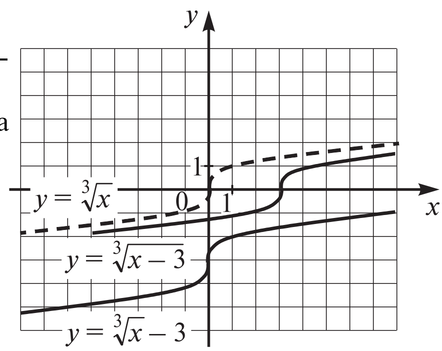
Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 80.

Задания (а) и (б) удобно выполнить в одной системе координат.

Выполним построение опорного графика функции $y=\sqrt[3]{x}$:

x	0	$\pm\frac{1}{8}$	±1	$\pm\frac{27}{8}=\pm3\frac{3}{8}$	±8
y	0	$\pm\frac{1}{2}$	±1	$\pm\frac{3}{2}=\pm1\frac{1}{2}$	±2



Затем выполним параллельный перенос графика функции $y=\sqrt[3]{x}$ вправо на 3 единицы вдоль оси Ox в случае (а) и вниз на 3 единицы вдоль оси Oy в случае (б).

№ 81.

Построим графики функций $y=\sqrt[3]{x}$ и $y=2-x$.

Найдем точку (точки) их пересечения: точка одна.

Определим абсциссу точки пересечения: $x=1$.

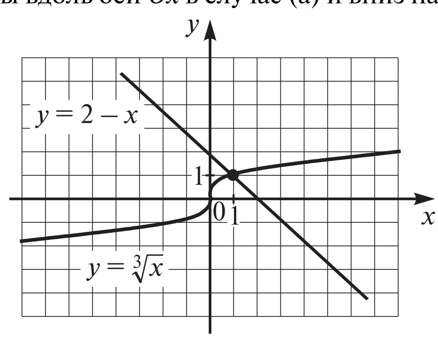
Выполним проверку:

$\sqrt[3]{x}=2-x$

$\sqrt[3]{1}=1$; $2-1=1$.

$1=1$ (верно)

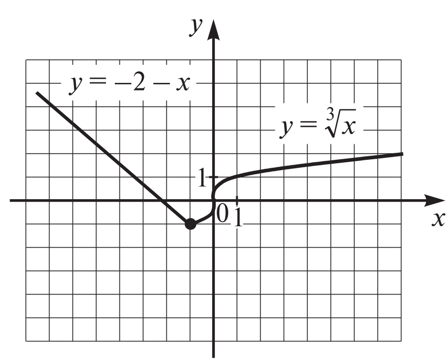
Ответ: $\{1\}$.



№ 82.

$$y=\begin{cases}-2-x, \text{ если } x<-1\\ \sqrt[3]{x}, \text{ если } x\geqslant -1\end{cases}$$

Построим график функции $y=-2-x$ с областью определения $D(f)=(-\infty; -1)$.



Построим график функции $y=\sqrt[3]{x}$ с областью определения $D(f)=[-1;+\infty)$. Объединим построенные линии на области определения $D(f)=(-\infty;+\infty)$.

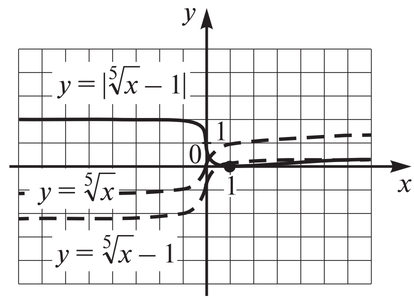
№ 83.

б) $y=\left|\sqrt[5]{x}-1\right|$

Выполним построение вспомогательного графика $y=\sqrt[5]{x}$.

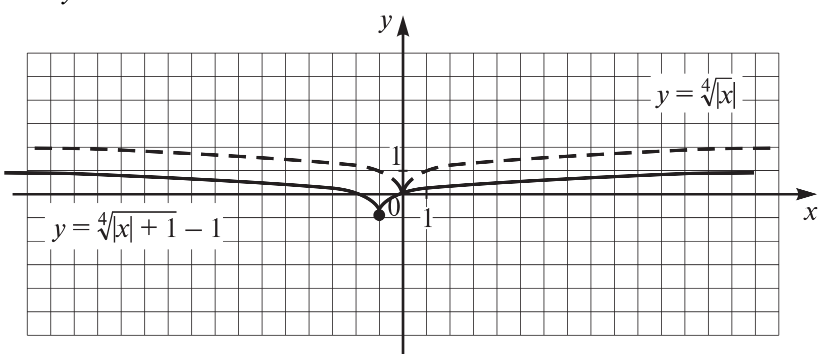
Затем выполним параллельный перенос графика вниз на 1 единицу вдоль оси Oy.

Наконец, отразим относительно оси Ox ту его часть, которая лежит ниже оси Ox, то есть соответствует $x\in(-\infty;1)$.



в) $y=\sqrt[4]{|x|+1}-1$

Выполним построение графика $y=\sqrt[4]{|x|}$ ($D(f)=(-\infty;+\infty)$), затем — параллельный перенос графика влево на 1 единицу вдоль оси Ox и вниз на 1 единицу вдоль оси Oy.



Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 90.*

ОДЗ данного уравнения: $2-x^2\geqslant 0 \iff x\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$. Но при таких значениях переменной $3-x^3\geqslant 3-\sqrt{2^3}=3-\sqrt{8}>0$. Поэтому при всех допустимых значениях x первое слагаемое неотрицательно, а второе положительно, поэтому сумма не может быть равна нулю.

П. 4.1.5.* Иррациональность чисел $\sqrt[n]{a}$

Основные содержательные цели.

1) Познакомить учащихся с теоремой о рациональных корнях многочлена с целыми коэффициентами и сформировать умение применять ее для определения рациональности или иррациональности чисел вида $\sqrt[n]{a}$, где a — натуральное число.

2) Тренировать умение строить график $y=\sqrt[n]{x}$, строить графики функций с помощью преобразования вспомогательного графика. Закрепить умение определять четность, нечетность функции и применять это свойство для построения графика.

Для доказательства теоремы о корнях уравнения $x^n = a$ (теорема 1) учащиеся знакомятся с теоремой о рациональных корнях алгебраических уравнений с целыми коэффициентами (теорема 2). Для **организации самостоятельной деятельности** учащихся по формулировке гипотезы о рациональных корнях алгебраических уравнений с целыми коэффициентами, ее доказательству и применению рекомендуется выполнить № 94. После чего учитель, опираясь на эту теорему, знакомит учащихся с теоремой о корнях уравнения $x^n = a$.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 91.

На диаграмме представлены множества действительных, рациональных, целых и натуральных чисел. Иррациональными являются все действительные числа, не являющиеся рациональными.

Иррациональным, например, является число $\sqrt{2}$. Действительно, пусть $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$ — несократимая дробь. Тогда

$$\frac{m^2}{n^2} = 2 \quad \Leftrightarrow \quad m^2 = 2n^2.$$

Значит, m — четное число. Поэтому m^2 делится на 4, значит, n^2 делится на 2, тогда n тоже четное, что противоречит тому, что дробь была несократимой.

№ 92.

а) Пусть $\sqrt[5]{11} = \frac{m}{n}$ — несократимая дробь. Тогда

$$\frac{m^5}{n^5} = 11 \quad \Leftrightarrow \quad m^5 = 11n^5.$$

Значит, m делится на 11. Поэтому m^5 делится на 11^5, значит, n^5 делится на 11^4, тогда n должно делиться на 11 (так как 11 простое число), что противоречит тому, что дробь была несократимой.

б) Пусть $\sqrt[3]{3} - \sqrt{2} = r$ — рациональное число. Тогда

$$\sqrt[3]{3} = r + \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad 3 = r^3 + 3r^2\sqrt{2} + 6r + 2\sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad \left(3r^2 + 2\right)\sqrt{2} = 3 - 6r - r^3.$$

Так как $3r^2 + 2 \neq 0$, то левая часть иррациональное число, а правая — рациональное. Противоречие.

№ 93.

а) Пусть $\frac{\alpha}{3} = \frac{m}{n}$ — рациональное число. Тогда $\alpha = \frac{3m}{n}$ — рациональное число. Противоречие.

б) Если $\beta = \sqrt{2}$, то $\beta^2 = 2$ — рациональное число.

Если $\beta = \sqrt[4]{2}$, то $\beta^2 = \sqrt{2}$ — иррациональное число.

в) Пусть $\alpha + r = q$ — рациональное число. Тогда $\alpha = q - r$ — рациональное число. Противоречие.

г) Если $\alpha = \beta = \sqrt{2}$, то $\alpha \cdot \beta = 2$ — рациональное число.

Если $\alpha = \beta = \sqrt[4]{2}$, то $\alpha \cdot \beta = \sqrt{2}$ — иррациональное число.

д) Если $\alpha = \beta = \sqrt{2}$, то $\alpha + \beta = 2\sqrt{2}$ — иррациональное число.

Если $\alpha = \sqrt{2}$, $\beta = -\sqrt{2}$, то $\alpha + \beta = 0$ – рациональное число.

е) Если $\alpha = \beta = \sqrt{2}$, то $\frac{\alpha}{\beta} = 1$ — рациональное число.

Если $\alpha = \sqrt{6}$, $\beta = \sqrt{2}$, то $\frac{\alpha}{\beta} = \sqrt{3}$ — иррациональное число.

Ответ: а) иррациональным; б) в зависимости от числа может получиться, как рациональное, так и иррациональное число; в) иррациональным; г) в зависимости от чисел может получиться, как рациональное, так и иррациональное число; д) в зависимости от чисел может получиться, как рациональное, так и иррациональное число; е) в зависимости от чисел может получиться, как рациональное, так и иррациональное число.

№ 95.

а) Из теоремы 2 следует, что рациональными корнями этого уравнения могут быть лишь числа из множества $\left\{\pm1; \pm2; \pm4; \pm\frac{1}{3}; \pm\frac{2}{3}; \pm\frac{4}{3}\right\}$. Подстановкой убеждаемся, что подходит только $x=\frac{1}{3}$.

а) Из теоремы 2 следует, что рациональными корнями этого уравнения могут быть лишь числа из множества $\left\{\pm1; \pm2; \pm5; \pm10; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{5}{2}\right\}$. Подстановкой убеждаемся, что подходят только $x=-\frac{1}{2}$ и $x = 2$.

Ответ: а) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$; б) $\left\{-\frac{1}{2}; 2\right\}$.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 104.*

Предположим, что это неверно. Тогда если одно из слагаемых нецелое число, то и второе — нецелое (иначе в сумме целого не получится). Значит, оба корня нецелые и, следовательно, иррациональные (теорема 1). Пусть $\sqrt{n}+\sqrt[3]{m}=k$, тогда

$$\sqrt[3]{m}=k-\sqrt{n} \quad \Leftrightarrow \quad m=k^3-3k^2\sqrt{n}+3kn-n\sqrt{n} \quad \Leftrightarrow \quad \left(3k^2+n\right)\sqrt{n}=k^3+3kn-m.$$

Так как $3k^2 + n > 0$, то левая часть иррациональное число, а правая — рациональное. Противоречие.

Ответ: верно.

§ 2. Решение простейших иррациональных уравнений и неравенств

П.4.2.1. Иррациональные уравнения

Основные содержательные цели.

1) Сформировать умение решать простейшие иррациональные уравнения.

2) Познакомить учащихся с методом “угадывания” корня и дальнейшего доказательства его единственности на основании монотонности функции.

3) Тренировать умение доказывать иррациональность чисел. Закрепить умение находить члены последовательности, заданной формулой n-го члена и умение исследовать на монотонность последовательность.

Для **самостоятельного открытия** способа решения иррационального уравнения с использованием определения корня n-й степени рекомендуется выполнить № 106 (1–2), третья часть этого задания готовит учащихся к выполнению следующего задания.

Для **самостоятельного открытия** способа решения иррационального уравнения с помощью возведения обеих частей уравнения в степень рекомендуется выполнить № 107. Выполнение № 105 готовит учащихся к открытию способов решения иррациональных уравнений, фиксируя их внимание на равносильности преобразований.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 108.

а) По определению арифметического квадратного корня данное уравнение $\sqrt{2x^2-3x+10}=3$ равносильно уравнению $2x^2 - 3x + 10 = 3^2$. А значит, необходимо решить квадратное уравнение $2x^2 - 3x + 1 = 0$:

Так как $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, тогда по теореме Виета, $x_2=\frac{1}{2}$.

Ответ: {0,5; 1}.

б) Данное уравнение $\sqrt{x^2-2x+5}=-2$ не имеет решений, так как по определению арифметический квадратный корень не может принимать отрицательные значения.

Ответ: {∅}.

в) По определению кубического корня уравнение $\sqrt[3]{x^2-11}=-2$ равносильно уравнению $x^2 - 11 = (-2)^3$ То есть необходимо решить квадратное уравнение $x^2-3=0 \Leftrightarrow (x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})=0 \Leftrightarrow x_1=\sqrt{3}; x_2=-\sqrt{3}$.

Ответ: $\{-\sqrt{3};\sqrt{3}\}$.

№ 109.

а) Возведем обе части уравнения в квадрат и решим полученное квадратное уравнение:

$\sqrt{x^2-3x}=\sqrt{2x-6}$

$\left(\sqrt{x^2-3x}\right)^2=\left(\sqrt{2x-6}\right)^2$

$x^2 - 3x = 2x - 6$

$x^2 - 5x + 6 = 0$

$x_1 = 2; x_2 = 3$

(по теореме, обратной теореме Виета).

Выполним проверку корней.

При $x = 2$, получим $\sqrt{2^2-6}=\sqrt{4-6} \Leftrightarrow \sqrt{-2}=\sqrt{-2}$, полученное равенство не имеет смысла, так как противоречит определению арифметического квадратного корня.

При $x = 3$, получим $\sqrt{3^2-9}=\sqrt{6-6} \Leftrightarrow \sqrt{0}=\sqrt{0}$ (истинно).

Ответ: {3}.

б) Возведем обе части уравнения в куб и решим полученное квадратное уравнение:

$\sqrt[3]{x^2+x}=\sqrt[3]{-2x-2}$

$\left(\sqrt[3]{x^2+x}\right)^3=\left(\sqrt[3]{-2x-2}\right)^3$

$x^2 + x = -2x - 2$

$x^2 + 3x + 2 = 0$

Так как $a + c = b$, то $x_1 = -1$, тогда по теореме Виета, $x_2 = -2$.

Проверку корней выполнять не надо, так как использованное преобразование $\sqrt[3]{a}=\sqrt[3]{b} \Leftrightarrow a=b$ является равносильным.

Ответ: {–2; –1}.

№ 110.

а) Уединим квадратный корень и возведем обе части уравнения $2x-1=\sqrt{x^2-5x+5}$ в квадрат, и, учитывая, что это преобразование будет равносильным только при неотрицательной левой части уравнения, запишем следующую равносильность:

$$2x-1=\sqrt{x^2-5x+5} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases}(2x-1)^2=x^2-5x+5\\ x \geqslant 0{,}5\end{cases}$$

Решим квадратное уравнение, входящее в систему:

$3x^2 + x - 4 = 0$

Так как $a + b + c = 0$, то $x_1 = 1$, тогда по теореме Виета, $x_2=\frac{-4}{3}=-1\frac{1}{3}$.

Проверим, удовлетворяют ли найденные корни второму условию системы:

$1 \geqslant 0{,}5$ истинно, $-1\frac{1}{3} \geqslant 0{,}5$ ложно.

Ответ: {1}.

б) Уединим кубический корень и возведем обе части уравнения $\sqrt[3]{x^2-5x-14-x^3}=-x$ в куб:

$\left(\sqrt[3]{x^2-5x-14-x^3}\right)^3=(-x)^3$

$x^2 - 5x - 14 - x^3 = -x^3$

$x^2 - 5x - 14 = 0$

$x_1 = -2$; $x_2 = 7$

(по теореме, обратной теореме Виета).

Проверку корней выполнять не надо, так как использованное преобразование $a=\sqrt[3]{b} \quad \Leftrightarrow \quad a^3=b$ является равносильным.

Ответ: {–2; 7}.

№ 111.

При решении данного уравнения удобнее подобрать корень и доказать его единственность.

1) Если $x = 2$, то $\sqrt{2\cdot 2}+\sqrt{2-1}=9-3\cdot 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3=3$ (истинно).

2) $\sqrt{2x}+\sqrt{x-1}=9-3x \quad \Leftrightarrow \quad \sqrt{2x}+\sqrt{x-1}+3x=9$. Левая часть уравнения определена при $x \geqslant 1$. Каждое слагаемое в левой части уравнения задает возрастающую функцию при $x \in [1; +\infty)$. А, значит, функция $f(x)=\sqrt{2x}+\sqrt{x-1}+3x$ так же является возрастающей, то есть каждое свое значение она принимает только один раз: $f(2)=\sqrt{2\cdot 2}+\sqrt{2-1}+3\cdot 2=9$.

$x = 2$ — единственное решение исходного уравнения.

Ответ: {2}.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 124.*

Пусть $[x] = n$, $\{x\} = \alpha$. Тогда неравенство примет вид:

$\alpha n<n+\alpha-1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha n-n-\alpha+1<0 \quad \Leftrightarrow \quad (\alpha-1)(n-1)<0 \quad \Leftrightarrow \quad n>1,$

так как $\alpha = \{x\} < 1$. Значит, $[x] = n > 1$, то есть $x \geqslant 2$.

Ответ: $x \geqslant 2$.

П. 4.2.2* Иррациональные неравенства

Основные содержательные цели.

1) Сформировать умение решать простейшие иррациональные неравенства.

2) Сформировать умение решать более сложные неравенства, требующие рассмотрения ОДЗ неравенства или использования метода замены неизвестного*.

3) Тренировать умение решать простейшие иррациональные уравнения. Закрепить умение находить члены последовательности, заданной формулой n-го члена и умение исследовать на монотонность последовательность.

Для **самостоятельного открытия** способа решения простейшие иррациональных неравенств рекомендуется выполнить № 125 — № 126.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта:

№ 127.

а) $\sqrt{7x+1} \geqslant 2 \quad \Leftrightarrow \quad 7x+1 \geqslant 4 \quad \Leftrightarrow \quad x \geqslant \frac{3}{7}$.

б) Решений нет, так как квадратный корень всегда неотрицателен.

в) $\sqrt{2x+1} < 2 \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant 2x+1 < 4 \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \leqslant x < \frac{3}{2}$.

г) $\sqrt[3]{x-1} \leqslant -2 \quad \Leftrightarrow \quad x-1 \leqslant -8 \quad \Leftrightarrow \quad x \leqslant -7$.

д) $\sqrt[3]{3x-2} > 3 \quad \Leftrightarrow \quad 3x-2 > 27 \quad \Leftrightarrow \quad x > \frac{29}{3}$.

Ответ: а) $\left[\frac{3}{7};+\infty\right)$; б) $\varnothing$; в) $[-0,5;1,5)$; г) $(-\infty;-7]$; д) $\left(\frac{29}{3};+\infty\right)$

№ 128.

а) $\sqrt{5x+7-2x^2} > 2 \quad \Leftrightarrow \quad 5x+7-2x^2 > 4 \quad \Leftrightarrow \quad 2x^2-5x-3 < 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad (2x+1)(x-3) < 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\frac{1}{2}; 3\right)$.

б) $\sqrt{x^2-4} \leqslant 3 \Leftrightarrow 0 \leqslant x^2-4 \leqslant 9 \Leftrightarrow 4 \leqslant x^2 \leqslant 13 \Leftrightarrow x \in \left[-\sqrt{13}; -2\right] \cup \left[2; \sqrt{13}\right]$.

в) $\sqrt[3]{x^2-2x+1} > 2 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2x+1 > 8 \quad \Leftrightarrow \quad x^2-2x-7 > 0 \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty; 1-\sqrt{8}\right) \cup \left(1+\sqrt{8}; +\infty\right)$.

Ответ: а) $\left(-\frac{1}{2};3\right)$; б) $\left[-\sqrt{13};-2\right] \cup \left[2;\sqrt{13}\right]$; в) $\left(-\infty;1-\sqrt{8}\right) \cup \left(1+\sqrt{8};+\infty\right)$.

№ 129.

а) $(x^2-x-6)\sqrt{x+1} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ \begin{cases} x>-1 \\ x^2-x-6 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ \begin{cases} x>-1 \\ x \in (-\infty;-2] \cup [3;+\infty) \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x \in [3;+\infty) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{-1\} \cup [3;+\infty)$.

б) $(x-2)\sqrt{x^2-6x+5} \geqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x^2-6x+5=0 \\ \begin{cases} x^2-6x+5>0 \\ x-2 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \in \{1;5\} \\ \begin{cases} x \in (-\infty;1) \cup (5;+\infty) \\ x \geqslant 2 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \in \{1;5\} \\ x \in (5;+\infty) \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x \in \{1\} \cup [5;+\infty)$.

в) $\sqrt{x+6} < \sqrt{x^2+2x} \quad \Leftrightarrow \quad 0 \leqslant x+6 < x^2+2x \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant -6 \\ x^2+x-6>0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \geqslant -6 \\ x \in (-\infty;-3) \cup (2;+\infty) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in [-6;-3) \cup (2;+\infty)$.

Ответ: а) $\{-1\}\cup\{3;+\infty)$; б) $\{1\}\cup[5;+\infty)$; в) $[-6;-3)\cup(2;+\infty)$.

№ 130.

а) $\sqrt{2x+1} > 7-x \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 7-x \geqslant 0 \\ 2x+1 > 49-14x+x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 7-x < 0 \\ 2x+1 \geqslant 0 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 7 \\ x^2-16x+48 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x > 7 \\ x \geqslant \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \leqslant 7 \\ x \in (4;12) \end{cases} \\ x > 7 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x \in (4;7] \\ x > 7 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad x \in (4;+\infty)$.

б) $\sqrt{x^2-8} \leqslant 4-x \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 4-x \geqslant 0 \\ 0 \leqslant x^2-8 \leq 16-8x+x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 4-x < 0 \\ x \in \varnothing \end{cases} \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leqslant 4 \\ 8x \leqslant 24 \\ x^2 \geqslant 8 \end{cases} \quad \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} x \leqslant 3 \\ x \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2}; +\infty\right) \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad x \in \left(-\infty; -2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2}; 3\right]$.

Ответ: а) $(4;+\infty)$; б) $\left(-\infty; -2\sqrt{2}\right] \cup \left[2\sqrt{2}; 3\right]$.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 144.*

Заметим, что

$F_2^2 - F_1 \cdot F_3 = 1^2 - 1 \cdot 2 = -1$;

Покажем, что $F_{n+1}^2 - F_n \cdot F_{n+2} = -(F_n^2 - F_{n-1} \cdot F_{n+1})$. Пусть $F_{n-1} = a, F_n = b$. Тогда, согласно определению последовательности Фибоначчи, $F_{n+1} = a+b, F_{n+2} = b+(a+b) = a+2b$. Поэтому $F_{n+1}^2 - F_n \cdot F_{n+2} = (a+b)^2 - b(a+2b) = a^2+ab-b^2 = -(b^2-a^2-ab) = -(b^2-a(a+b)) = -(F_n^2 - F_{n-1} \cdot F_{n+1})$. Значит, знаки рассматриваемых выражений чередуются, и потому $F_{2012}^2 - F_{2011} \cdot F_{2013} = -(F_{2011}^2 - F_{2010} \cdot F_{2012}) = \ldots = F_2^2 - F_1 \cdot F_3 = -1$.

Ответ: -1.

§ 3. Расширение понятия степени

П.4.3.1. Степень с целым показателем

Основные содержательные цели.

1) Сформировать понятие степени с отрицательным целым показателем.

2) Сформировать умение применять основные свойства степеней с целым показателем.

3) Тренировать умение решать иррациональные неравенства. Закрепить умение решать задачи на арифметическую прогрессию.

Для **самостоятельного** расширения понятия степени рекомендуется выполнить № 147 — № 148. Предыдущие задания пункта готовят учащихся к открытию, актуализируя понятие степени с неотрицательным целым показателем.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 149.

Воспользуемся определением степени с целым отрицательным показателем. Для этого необходимо данную дробь представить в виде обыкновенной дроби, в числителе которой была бы 1, а в знаменателе — степень с натуральным показателем.

а) $\frac{1}{1000000000}=\frac{1}{10^9}=10^{-9}$;

б) $0,000002=\frac{2}{1000000}=2\cdot\frac{1}{10^6}=2\cdot10^{-6}$;

в) $0,000000003=\frac{3}{1000000000}=3\cdot\frac{1}{10^9}=3\cdot10^{-9}$.

№ 150.

Воспользуемся определением степени с целым отрицательным показателем.

а) $5^{-2}=\frac{1}{5^2}=\frac{1}{25}=0,04$; б) $5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$; в) $\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=\frac{1}{\left(\frac{1}{5}\right)^1}=5$;

г) $\frac{1}{5^{-3}}=5^3=125$; д) $\left(\frac{1}{5^2}\right)^{-2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{5^2}\right)^2}=\frac{1}{\frac{1}{5^4}}=625$.

№ 151.

Для выполнения задания применим основные свойства степени.

а) $\frac{(-2)^3\cdot(-2)^5}{\left((-2)^3\right)^2\cdot(-2)^{-7}}=\frac{(-2)^8}{(-2)^6\cdot(-2)^{-7}}=\frac{(-2)^8}{(-2)^{-1}}=(-2)^9=-512$;

б) $\frac{\left((-3)^2\right)^4\cdot9^{-5}}{(-27)^2\cdot3^{-7}}=\frac{(-3)^8\cdot(3^2)^{-5}}{\left((-3)^3\right)^2\cdot3^{-7}}=\frac{3^8\cdot3^{-10}}{3^6\cdot3^{-7}}=\frac{3^{-2}}{3^{-1}}=3^{-1}=\frac{1}{3}$;

в) $\frac{\left(-\frac{5}{2}\right)^{-3}\cdot0,16^{-2}}{6,25^2\cdot0,4^5}=\frac{\left(-\frac{5}{2}\right)^{-3}\cdot\left(\left(\frac{2}{5}\right)^2\right)^2}{\left(\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)^2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^5}=-\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}\cdot\left(\left(\frac{5}{2}\right)^{-2}\right)^{-2}}{\left(\frac{5}{2}\right)^4\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^{-5}}=-\frac{\left(\frac{5}{2}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{5}{2}\right)^4}{\left(\frac{5}{2}\right)^{-1}}=$

$=-\left(\frac{5}{2}\right)^{-3+4-(-1)}=-\left(\frac{5}{2}\right)^2=-\frac{25}{4}$;

г) $\left(1+(2^{-1}+3^{-1})^{-1}\right)^{-1}=\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}}=\frac{1}{1+\frac{6}{5}}=\frac{1}{\frac{11}{5}}=\frac{5}{11}$.

№ 152.

а) $\left(\frac{a^{-1}-b^{-1}}{a^{-2}-b^{-2}}\right)^{-1}\cdot\frac{a^{-1}+b^{-1}}{(ab)^{-1}}=\left(\frac{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}}{\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}}\right)^{-1}\cdot\frac{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}{\frac{1}{ab}}=\left(\frac{\frac{b-a}{ab}}{\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}}\right)^{-1}\cdot\frac{\frac{b+a}{ab}}{\frac{1}{ab}}=$

$=\left(\frac{ab}{b+a}\right)^{-1}\cdot(b+a)=\frac{1}{\frac{ab}{b+a}}\cdot(b+a)=\frac{(b+a)^2}{ab}=\frac{a^2+2ab+b^2}{ab}=2+\frac{a}{b}+\frac{b}{a}$;

б) $\left(\left(a^{-3}-a^{-1}b^{-2}-b^{-3}\right)\left(b^{3}-a^{2}b-a^{3}\right)^{-1}\right)^{-1}=\left(\left(\frac{1}{a^{3}}-\frac{1}{ab^{2}}-\frac{1}{b^{3}}\right)\left(\frac{1}{b^{3}-a^{2}b-a^{3}}\right)\right)^{-1}=$

$$=\left(\frac{b^{3}-a^{2}b-a^{3}}{a^{3}b^{3}}\cdot\frac{1}{b^{3}-a^{2}b-a^{3}}\right)^{-1}=\left(\left(a^{3}b^{3}\right)^{-1}\right)^{-1}=a^{3}b^{3}.$$

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 163.*

Числа $a=x^{3}+x^{-1}=\frac{x^{4}+1}{x}$ и $b=x+x^{-3}=\frac{x^{4}+1}{x^{3}}$ рациональные. Значит, число $c=\frac{a}{b}=x^{2}$ рациональное. Но тогда и число $x=\frac{x^{4}+1}{a}=\frac{c^{2}+1}{a}$ рациональное.

П. 4.3.2. Степень с рациональным показателем

Основные содержательные цели.

1) Сформировать понятие степени с дробным показателем.

2) Сформировать умение применять основные свойства степеней с рациональным показателем.

3) Тренировать умение применять основные свойства степеней с целым показателем. Закрепить умение решать задачи на арифметическую прогрессию.

Для **самостоятельного** расширения понятия степени рекомендуется выполнить № 166 — № 167. Предыдущее задание готовит учащихся к открытию, актуализируя понятие степени с неотрицательным целым показателем и корня n-й степени.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 167.

Применим определение степени с рациональным показателем.

а) $5^{\frac{1}{2}}=\sqrt{5}$; б) $5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5}$; в) $5^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{5^{2}}=\sqrt[3]{25}$; г) $5^{\frac{3}{2}}=\sqrt{5^{3}}=\sqrt{125}$.

№ 168.

Применим определение степени с рациональным показателем.

а) $\sqrt[3]{5}=5^{\frac{1}{3}}$; б) $\sqrt[3]{5^{2}}=5^{\frac{2}{3}}$; в) $\sqrt[3]{5^{4}}=5^{\frac{4}{3}}$; г) $\sqrt[4]{5^{3}}=5^{\frac{3}{4}}$.

№ 169.

Применим определения степени с рациональным показателем и целым отрицательным показателем.

а) $5^{-\frac{1}{2}}=\sqrt{5^{-1}}=\sqrt{\frac{1}{5}}=\frac{1\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{5}$;

б) $5^{-\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{5^{-1}}=\sqrt[3]{\frac{1}{5}}=\frac{1\cdot\sqrt[3]{5^{2}}}{\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{5^{2}}}=\frac{\sqrt[3]{5^{2}}}{\sqrt[3]{5^{3}}}=\frac{\sqrt[3]{5^{2}}}{5}$;

в) $5^{-\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{5^{-2}}=\sqrt[3]{\frac{1}{5^{2}}}=\frac{1\cdot\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^{2}}\cdot\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5^{3}}}=\frac{\sqrt[3]{5}}{5}$;

г) $5^{-\frac{3}{2}}=\sqrt{5^{-3}}=\sqrt{\frac{1}{5^{3}}}=\frac{1\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5^{3}}\cdot\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5^{4}}}=\frac{\sqrt{5}}{25}$.

№ 170.

а) Запишем показатели степеней в виде обыкновенных дробей и применим определение степени с рациональным показателем:

$$\left(81^{-0,25}\cdot 25^{0,5}-32^{0,2}:9^{0,5}\right)^{-0,35}=\left(81^{-\frac{1}{4}}\cdot 25^{\frac{1}{2}}-32^{\frac{1}{5}}:9^{\frac{1}{2}}\right)^{-\frac{7}{20}}=$$

$$=\left(\frac{1}{\sqrt[4]{81}}\cdot\sqrt{25}-\sqrt[5]{32}:\sqrt{9}\right)^{-\frac{7}{20}}=\left(\frac{5}{3}-\frac{2}{3}\right)^{-\frac{7}{20}}=1^{-\frac{7}{20}}=\frac{1}{\sqrt[20]{1^7}}=1;$$

б) Запишем показатели степеней в виде обыкновенных дробей и применим определение и свойство степени с рациональным показателем:

$$\left(\left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 10^{-5}+10000^{-1,25}\right)^{-0,5}=\left(\left(3^{-3}\right)^{-\frac{2}{3}}\cdot 10^{-5}+\left(10^4\right)^{-\frac{5}{4}}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(3^2\cdot 10^{-5}+10^{-5}\right)^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(10^{-5}\cdot(9+1)^{-\frac{1}{2}}\right)=\left(10^{-5}\cdot 10\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(10^{-4}\right)^{-\frac{1}{2}}=10^2=100;$$

в)

$$\left(1+5^{\frac{1}{3}}+25^{\frac{1}{3}}\right)\left(1+2\sqrt[3]{-5}+\sqrt[3]{25}\right)^{0,5}=\left(1+5^{\frac{1}{3}}+\left(5^2\right)^{\frac{1}{3}}\right)\left(1-2\cdot 5^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$\left(1+5^{\frac{1}{3}}+\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^2\right)\left(1-2\cdot 5^{\frac{1}{3}}+\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}=\left(1+5^{\frac{1}{3}}+\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^2\right)\left(\left(1-5^{\frac{1}{3}}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(1+5^{\frac{1}{3}}+\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^2\right)\cdot\left|1-5^{\frac{1}{3}}\right|=\left(1+5^{\frac{1}{3}}+\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^2\right)\left(5^{\frac{1}{3}}-1\right)=\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3-1^3=5-1=4.$$

№ 171.

а)

$$\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{4}}\right)\left(x+x^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x^{0,5}+x^{-0,25}\right)x=\left(x^{\frac{1}{2}}-x^{-\frac{1}{4}}\right)\left(x^{\frac{1}{2}}+x^{-\frac{1}{4}}\right)\left(x+x^{-\frac{1}{2}}\right)x=$$

$$=\left(\left(x^{\frac{1}{2}}\right)^2-\left(x^{-\frac{1}{4}}\right)^2\right)\left(x+x^{-\frac{1}{2}}\right)x=\left(x-x^{-\frac{1}{2}}\right)\left(x+x^{-\frac{1}{2}}\right)x=\left(x^2-\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^2\right)x=\left(x^2-x^{-1}\right)x=x^3-1;$$

б)

$$\frac{a^{\frac{4}{3}}+\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{5}}\right)^2+b^{0,8}}{a^2-b^{1,2}}=\frac{\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^2+a^{\frac{2}{3}}b^{\frac{2}{5}}+\left(b^{\frac{2}{5}}\right)^2}{\left(a^{\frac{2}{3}}\right)^3-\left(b^{\frac{2}{5}}\right)^3}=\frac{1}{a^{\frac{2}{3}}-b^{\frac{2}{5}}};$$

в)

$$\left(\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}-1}-\frac{1}{t^{1,5}-1}\right)^{-1}\left(t^3+t\sqrt{t}+1\right)+t^{-0,75}\right)^{0,8}=\left(\left(\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}-1}-\frac{1}{t^{\frac{3}{2}}-1}\right)^{-1}\left(\left(t^{\frac{3}{2}}\right)^2+t^{\frac{3}{2}}+1\right)+t^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{5}}=$$

$$=\left(\left(\frac{t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{3}{4}}}{\left(t^{\frac{3}{4}}-1\right)\left(t^{\frac{3}{2}}-1\right)}\right)^{-1}\left(\left(t^{\frac{3}{2}}\right)^2+t^{\frac{3}{2}}+1\right)+t^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{4}{5}}=\left(\frac{\left(t^{\frac{3}{4}}-1\right)\left(t^{\frac{3}{2}}-1\right).\left(\left(t^{\frac{3}{2}}\right)^2+t^{\frac{3}{2}}+1\right)}{\left(t^{\frac{3}{4}}\right)^2-t^{\frac{3}{4}}}+\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{4}{5}}=$$

$$=\left(\frac{\left(t^{\frac{3}{4}}-1\right)\left(\left(t^{\frac{3}{2}}\right)^3-1^3\right)}{t^{\frac{3}{4}}\left(t^{\frac{3}{4}}-1\right)}+\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{4}{5}}=\left(\frac{t^{\frac{9}{2}}-1}{t^{\frac{3}{4}}}+\frac{1}{t^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{4}{5}}=\left(\frac{t^{\frac{9}{2}}}{t^{\frac{3}{4}}}\right)^{\frac{4}{5}}=\left(t^{\frac{15}{4}}\right)^{\frac{4}{5}}=t^3.$$

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 183.*

Среди 100 последовательных натуральных чисел 50 нечетных, а среди 98 последовательных натуральных чисел 49 нечетных. Значит, первая сумма четное число, а вторая — нечетное. Поэтому они не могут оканчиваться на одинаковые цифры.

Ответ: не может.

П. 4.3.3*. Степенная функция $y = kx^n$

Основные содержательные цели.

1) Познакомить учащихся с функцией $y = kx^n$ и выявить ее свойства.

2) Тренировать умение применять основные свойства степеней с рациональным показателем. Закрепить умение решать задачи на арифметическую прогрессию.

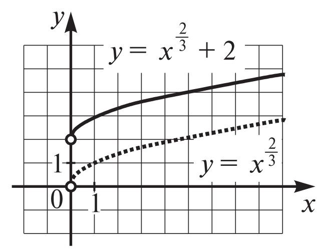
Для **самостоятельного** знакомства с функцией $y = x^n$ и **открытия** ее свойств, путем систематизации уже известных случаев и рассмотрения новых случаев показателя рекомендуется выполнить № 184 — № 185.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 186.

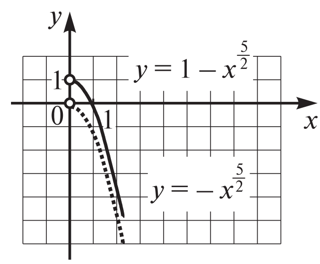
а) $y = x^{\frac{2}{3}} + 2$

1) Построим график функции $y = x^{\frac{2}{3}}$.
$D(f) = (0; +\infty)$; $E(f) = (0; +\infty)$
График проходи через точку (1; 1).
Выполним параллельный перенос графика на 2 единицы вверх вдоль оси Oy.
$D(f) = (0; +\infty)$; $E(f) = (2; +\infty)$.
График проходит через точку (1; 3).



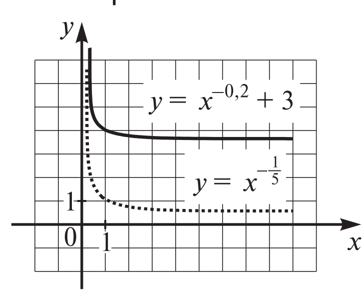
б) $y = 1 - x^2\sqrt{x}$

1) Построим график функции $y = -x^{\frac{5}{2}}$.
$D(f) = (0; +\infty)$; $E(f) = (-\infty; 0)$.
График проходит через точку (1; –1).
Выполним параллельный перенос графика на 1 единицы вверх вдоль оси Oy.
$D(f) = (0; +\infty)$; $E(f) = (-\infty; 1)$.
График проходит через точку (1; 0).



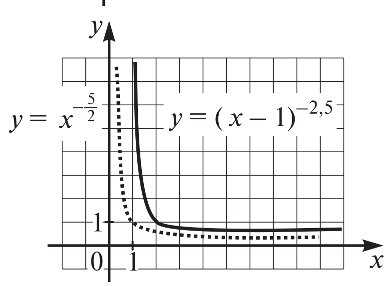
в) $y = x^{-0,2} + 3$

1) Построим график функции $y = x^{-\frac{1}{5}}$.
$D(f) = (0; +\infty)$; $E(f) = (0; +\infty)$.
График проходит через точку (1; 1).
2) Выполним параллельный перенос графика на 3 единицы вверх вдоль оси Oy.
$D(f) = (0; +\infty)$; $E(f) = (3; +\infty)$.
График проходит через точку (1; 4).



г) $y = (x - 1)^{-2,5}$

1) Построим график функции $y = x^{-\frac{5}{2}}$.
$D(f) = (0; +\infty)$; $E(f) = (0; +\infty)$.
График проходит через точку (1; 1).
2) Выполним параллельный перенос графика на 1 единицу вправо вдоль оси Ox.



$D(f) = (1; +\infty)$; $E(f) = (0; +\infty)$.

График проходит через точку (2; 1).

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 198.*

Пусть в классе m мальчиков и d девочек. Тогда из условия следует, что $1 + 2 + \ldots + m$ делится на d, а $1 + 2 + \ldots + d$ делится на m. То есть существуют такие целые n и k, что

$$\frac{m(m+1)}{2} = kd, \quad \frac{d(d+1)}{2} = nm.$$

Следовательно, $\frac{(d+1)(m+1)}{4} = kn$. Хотя бы один из множителей числителя должен быть четным. Значит, хотя бы одно из чисел m или d — нечетное.

П. 4.3.4. Уравнения, содержащие неизвестное в рациональной степени

Основные содержательные цели.

1) Познакомить учащихся с приемами решения уравнений, содержащих неизвестное в степени с отрицательным и дробным показателем.

2) Тренировать умение строить график функции $y = x^n$. Закрепить умение решать задачи на арифметическую прогрессию.

Для **самостоятельного открытия** способа решения простейшего уравнения, содержащего неизвестное в степени с отрицательным показателем, и способа решения простейшего уравнения, содержащего неизвестное в степени с дробным показателем, рекомендуется выполнить № 199 — № 202.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 203.

а) Применим определение степени с целым отрицательным показателем и решим полученное дробно-рациональное уравнение:

$$\left((3x)^{-1} - 7\right)^{-2} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{1}{3x} - 7\right)^2} = \frac{1}{4}, \quad x \neq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\left(\frac{1-21x}{3x}\right)^2} = \frac{1}{4}, \quad x \neq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1-21x}{3x}\right)^2 = 4, \quad x \neq \left\{0; \frac{1}{21}\right\} \Leftrightarrow \frac{1-21x}{3x} = \pm 2, \quad x \neq \left\{0; \frac{1}{21}\right\}$$

$$\frac{1-21x}{3x} = 2, x \neq \left\{0; \frac{1}{21}\right\} \Leftrightarrow 1 - 21x = 6x, x \neq \left\{0; \frac{1}{21}\right\} \Leftrightarrow 27x = 1, x \neq \left\{0; \frac{1}{21}\right\} \Leftrightarrow x = \frac{1}{27}$$

$$\frac{1-21x}{3x} = -2, x \neq \left\{0; \frac{1}{21}\right\} \Leftrightarrow 1 - 21x = -6x, x \neq \left\{0; \frac{1}{21}\right\} \Leftrightarrow 15x = 1, x \neq \left\{0, \frac{1}{21}\right\} \Leftrightarrow x = \frac{1}{15}$$

Ответ: $\left\{\frac{1}{27}; \frac{1}{15}\right\}$.

б) Применим определение степени с целым отрицательным показателем и решим полученное дробно-рациональное уравнение:

$$x^{-1} - 2x = \frac{7}{3}$$

$$\frac{1}{x} - 2x = \frac{7}{3}$$

$$\frac{3-6x^2-7x}{3x}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 6x^2+7x-3=0 \\ x\neq 0 \end{cases}$$

Решим квадратное уравнение системы:

$6x^2 + 7x - 3 = 0$

$D = 7^2 + 4 \cdot 6 \cdot 3 = 49 + 72 = 121 > 0$, два корня.

$$x_1=\frac{-7-11}{12}=-1{,}5; \qquad x_2=\frac{-7+11}{12}=\frac{1}{3}$$

Проверим второе условие системы:

$-1{,}5\neq 0$(верно); $\qquad \frac{1}{3}\neq 0$ (верно).

Ответ: $\left\{-1{,}5;\frac{1}{3}\right\}$.

в) Запишем уравнение $\left(\frac{x-1}{2}\right)^{-4}-2\left(\frac{2}{1-x}\right)^2-8=0$ в виде $\left(\frac{2}{x-1}\right)^4-2\left(\frac{2}{x-1}\right)^2-8=0$ и сделаем замену неизвестного $t=\left(\frac{2}{x-1}\right)^2$ $(t>0)$.

$t^2 - 2t - 8 = 0$

$t_1 = -2$; $t_2 = 4$ (по теореме, обратной теореме Виета).

Так как $t > 0$, то корень -2 не подходит.

Вернемся к “старому” неизвестному: $\left(\frac{2}{x-1}\right)^2=4 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \frac{2}{x-1}=2 \\ x\neq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} \frac{2}{x-1}=-2 \\ x\neq 1 \end{cases} \end{array}\right.$

Решим уравнение первой системы:

$$\frac{2}{x-1}=2$$

$$\frac{4-2x}{x-1}=0$$

$x = 2$

$2 \neq 1$ (верно).

Решим уравнение второй системы:

$$\frac{2}{x-1}=-2$$

$$\frac{2x}{x-1}=0$$

$x = 0$

$0 \neq 1$ (верно).

Ответ: $\{0; 2\}$.

№ 204.

а) Применим определение степени с рациональным показателем и решим иррациональное уравнение:

$$(2x^2-5)^{\frac{5}{3}}=32$$

$$\sqrt[3]{(2x^2-5)^5}=32$$

$(2x^2 - 5)^5 = (32)^3$

$(2x^2 - 5)^5 = (2^3)^5$

$2x^2 - 5 = 8$

$2x^2 = 13$

$$x^2=\frac{13}{2}$$

$$x_1=\sqrt{\frac{13}{2}}; \quad x \ =-\sqrt{\frac{13}{2}}$$

Ответ: $\left\{-\sqrt{\frac{13}{2}};\sqrt{\frac{13}{2}}\right\}$.

б) Возведем обе части уравнения $\left(x^2-3|x|-1\right)^{2,5}=243$ в степень $\dfrac{2}{5}$ и решим полученное уравнение:

$$\left(\left(x^2-3|x|-1\right)^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{2}{5}}=243^{\frac{2}{5}}$$

$$x^2-3|x|-1=\sqrt[5]{243^2}$$

$$x^2-3|x|-1=9$$

$$x^2-3|x|-10=0$$

Решим полученное уравнение введением нового неизвестного: пусть $t=|x|$.

$t^2-3t-10=0$

$t_1=-2;\ t_2=5$

(по теореме, обратной теореме Виета).

Вернемся к "старому" неизвестному:

$|x|=-2$ не имеет решений (по определению $|x|\geqslant 0$);

$$|x|=5 \quad\Leftrightarrow\quad \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=5 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-5;\ 5\}$.

в) Уравнение $(x+5)^{\frac{11}{5}}=-2$ не имеет решений, так как по определению степень с рациональным показателем может быть только положительным числом.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 214.

Вычислим несколько первых членов:

$$x_2=1-\frac{1}{x_1}=\frac{x_1-1}{x_1}=\frac{1233}{1234};$$

$$x_3=1-\frac{1}{x_2}=1-\frac{1234}{1233}=-\frac{1}{1233};$$

$$x_4=1-\frac{1}{x_3}=1+1233=1234=x_1.$$

Значит, $x_1=x_4=x_7=\ldots=x_{3n+1}=\ldots=x_{1000}$. Поэтому $x_{1000}=x_1=1234$.

Ответ: 1234.

§ 4. Решение уравнений и неравенств высших степеней

4.4.1. Решение уравнений высших степеней

Основные содержательные цели.

1) Сформировать понятие уравнения n-й степени.

2) Сформировать понятие возвратного уравнения 4-го порядка и сформировать умение их решать.

3) Повторить и систематизировать известные способы решения уравнения высших степеней и дополнить их новыми. Сформулировать два основных метода их решения: метод разложения на множители, метод замены неизвестного.

4) Сформировать представление о методе неопределенных коэффициентов*.

5) Тренировать умение решать уравнения, содержащие неизвестное в степени

с рациональным показателем. Закрепить умение решать задачи на геометрическую прогрессию.

Для повторения известных видов уравнений высших степеней **и самостоятельной формулировки** определения уравнения n-й степени рекомендуется выполнить № 215. При выполнении № 216–218 учащиеся повторяют и **систематизируют** известные им способы решения уравнений высших степеней, после чего формулируют основные методы их решения.

Более подготовленные учащиеся могут **самостоятельно познакомиться** с понятием возвратного уравнения и открыть способ его решения, для этого рекомендуется выполнить № 219.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта:

№ 220.

Чтобы решить неполное уравнение n-ой степени, преобразуем и решим его, используя определение корня n-ой степени.

а) $0{,}125x^3 = 64 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = \dfrac{64\cdot 1000}{125} \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{\dfrac{64\cdot 1000}{125}} \quad \Leftrightarrow \quad x = 8$.

Ответ: $\{8\}$.

б) $-3x^3 = 375 \quad \Leftrightarrow \quad x^3 = -125 \quad \Leftrightarrow \quad x = \sqrt[3]{-125} \quad \Leftrightarrow \quad x = -5$.

Ответ: $\{-5\}$.

в) $x^6 - 512 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x^6 = 512 \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt[6]{512} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm\sqrt[6]{2^6\cdot 2^3} \quad \Leftrightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{2}$.

Ответ: $\left\{-2\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right\}$.

г) $4x^4 + 4 = 0 \Leftrightarrow x^4 = -1 \Leftrightarrow x \in \varnothing$, так как $x^4 \geqslant 0$ для любого $x \in \boldsymbol{R}$.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

№ 221.

а) $5x^4 - 6x^2 + 1 = 0$

Пусть $x^2 = a$. Решим уравнение относительно a.

$5a^2 - 6a + 1 = 0$

Так как сумма коэффициентов квадратного уравнения равна нулю, то $a_1 = 1$, и по теореме Виета $a_2 = \dfrac{1}{5}$.

Вернемся к «старому» неизвестному:

$x^2 = 1$ $\qquad\qquad$ $x^2 = \dfrac{1}{5}$

$x_1 = 1; x_2 = -1.$ $\qquad\qquad$ $x_1 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$; $x_2 = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Ответ: $\left\{-1; 1; -\dfrac{1}{\sqrt{5}}; \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right\}$.

б) $3x^4 + 4x^2 + 1 = 0$

Пусть $x^2 = a$. Решим уравнение относительно a.

$3a^2 + 4a + 1 = 0$

Так как сумма старшего коэффициента и свободного члена противоположна второму коэффициенту квадратного уравнения, то $a_1 = -1$, и по теореме Виета $a_2 = -\dfrac{1}{3}$.

Вернемся к “старому” неизвестному:

$x^2 = -\dfrac{1}{3}$ $\qquad\qquad$ $x^2 = -1$

Ни одно из двух уравнений не имеет решений, так как $x^2 \geqslant 0$ при любом $x \in \boldsymbol{R}$.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

в) $3x^4 + 5x^2 - 2 = 0$

Пусть $x^2 = a$. Решим уравнение относительно a.

$3a^2 + 5a - 2 = 0$

$D = 25 + 4 \cdot 3 \cdot 2 = 49 > 0$, два корня.

$a_1 = \frac{-5+7}{6} = \frac{1}{3}$; $a_2 = \frac{-5-7}{6} = -2$

Вернемся к «старому» неизвестному:

1) $x^2 = \frac{1}{3}$

$x_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $x_2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2) $x^2 = -2$

Нет решений, так как $x^2 \geqslant 0$ при любом $x \in \boldsymbol{R}$.

Ответ: $\left\{-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}$.

г) $x^4 + x^2 + 2 = 0$

Пусть $x^2 = a$. Решим уравнение относительно a.

$a^2 + a + 2 = 0$

$D = 1 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = -7 < 0$, нет решений.

Ответ: $\{\varnothing\}$.

д) $3x^4 - 8x^2 = 0$

$x^2 (3x^2 - 8) = 0$

$x^2 = 0$ $\qquad$ $3x^2 - 8 = 0$

$x = 0.$ $\qquad$ $x^2 = \frac{8}{3}$

$x = \pm\sqrt{\frac{8}{3}}$

$x = \pm\frac{2\sqrt{6}}{3}$.

Ответ: $\left\{0; -\frac{2\sqrt{6}}{3}; \frac{2\sqrt{6}}{3}\right\}$.

е) $x^4 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ответ: $\{0\}$.

№ 222.

а) Преобразуем левую часть уравнения и используем метод замены неизвестного.

$(x-2)^2 (x^2 - 4x) + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 (x^2 - 4x + 4 - 4) + 3 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 ((x-2)^2 - 4) + 3 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^4 - 4(x-2)^2 + 3 = 0$.

Пусть $(x-2)^2 = m$. Решим уравнение $m^2 - 4m + 3 = 0$ относительно m:

$m_1 = 1$, $m_2 = 3$ по теореме, обратной теореме Виета.

Вернемся к «старому» неизвестному и решим два уравнения:

$(x-2)^2 = 1$ $\qquad$ $(x-2)^2 = 3$

$x^2 - 4x + 3 = 0$ $\qquad$ $x - 2 = \pm\sqrt{3}$

$x_1 = 1$; $x_2 = 3$ $\qquad$ $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{3}$.

Ответ: $\{1; 3; 2-\sqrt{3}; 2+\sqrt{3}\}$.

б) $(x-1)^4 - x^2 + 2x - 73 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^4 - (x^2 - 2x + 1 - 1) - 73 = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x-1)^4 - (x-1)^2 - 72 = 0$.

Пусть $(x-1)^2 = m$. Решим уравнение $m^2 - m - 72 = 0$ относительно m:

$m_1 = -8$, $m_2 = 9$ по теореме, обратной теореме Виета.

Выполним обратную замену неизвестного:

$(x-1)^2=-8$ — нет решений, так как при $x \in \boldsymbol{R}$ $(x-1)^2 \geqslant 0$.

$(x-1)^2=9$
$x-1=\pm 3$
$x_1=-2;\ x_2=4.$

Ответ: $\{-2; 4\}$.

№ 223.

Для решения возвратного уравнения применим известный алгоритм.

1. Разделим обе части уравнения на x^2, так как x не может быть равен 0 по исходному уравнению.

$$x^2-3x+4-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}=0 \quad \Leftrightarrow \quad x^2+\frac{1}{x^2}-3\left(x+\frac{1}{x}\right)+4=0.$$

2. Сделаем замену $x+\frac{1}{x}=t$, (тогда $x^2+\frac{1}{x^2}=t^2-2$).

3. Решим полученное квадратное уравнение.

$t^2-2-3t+4=0$
$t^2-3t+2=0$
$t_1=1;\ t_2=2.$

4. Вернемся к «старому» неизвестному и решим два уравнения вида:

$x+\frac{1}{x}=1$
$x^2-x+1=0$
$D=1-4=-3<0$, нет корней.

$x+\frac{1}{x}=2$
$x^2-2x+1=0$
$(x-1)^2=0$
$x=1$

5. Запишем ответ.

Ответ: $\{1\}$.

№ 224.

а) Разложим левую часть уравнения, применяя метод группировки:

$x^3+5x^2-x-5=x^2(x+5)-(x+5)=(x+5)(x^2-1)=(x+5)(x-1)(x+1).$

Вернемся к решению уравнения:

$$(x+5)(x-1)(x+1)=0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x=-5 \\ x=1 \\ x=-1 \end{array}\right..$$

Ответ: $\{-5; -1; 1\}$.

б) Разложим левую часть уравнения, применяя метод группировки и формулы сокращенного умножения:

$x^4-(x^2+6x+9)=x^4-(x+3)^2=(x^2-x-3)(x^2+x+3).$

Вернемся к решению уравнения:

$(x^2-x-3)(x^2+x+3)=0$

$x^2-x-3=0$
$D=1+12=13>0$, два корня.

$$x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}.$$

$x^2+x+3=0$
$D=1-4\cdot 3=-11<0$, нет корней.

Ответ: $\left\{\frac{1-\sqrt{13}}{2}; \frac{1+\sqrt{13}}{2}\right\}$.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 238.*

Так как для любого действительного k справедливо неравенство $(51-k)(51+k)=51^2-k^2<51^2$,

то $101!=51\cdot(49\cdot52)\cdot(48\cdot53)\cdot\ldots\cdot(1\cdot101)=$

$=51\cdot\big((51-1)\cdot(51+1)\big)\cdot\big((51-2)\cdot(51+2)\big)\cdot\ldots\cdot\big((51-50)\cdot(51+50)\big)<$

$<51\cdot51^2\cdot51^2\cdot\ldots\cdot51^2=51^{101}$.

Ответ: $51^{101}>101!$

П. 4.4.2. Неравенства высших степеней: методы решения

Основные содержательные цели.

1) Закрепить умение решать неравенства высших степеней с применением разложения на множители.

2) Познакомить учащихся с применением замены неизвестного при решении неравенств высших степеней*.

3) Тренировать умение решать уравнения высших степеней. Закрепить умение решать задачи на геометрическую прогрессию.

Для повторения метода интервалов и применения разложения на множители для решения неравенств рекомендуется выполнить № 239 — № 240. Отметим, что для учащихся, которые в 8 классе рассматривали только неравенства, правая часть которых не требовала дополнительного шага разложения на множители, этот материал будет новым и может стать объектом для организации самостоятельного открытия учащихся (№ 240).

Для более подготовленных учащихся рекомендуется организовать **самостоятельное открытие** способа решения неравенств с помощью замены неизвестного (№ 241).

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 242.

а) $x^4-9x^2+20\geqslant0$

Это неравенство четвертой степени. Разложим левую часть неравенства на множители, используя теорему, обратную теореме Виета, и формулу разности квадратов:

$x^4-9x^2+20=(x^2-4)(x^2-5)=(x-2)(x+2)(x-\sqrt5)(x+\sqrt5)$

$x^4-9x^2+20\geqslant0 \quad\Leftrightarrow\quad (x-2)(x+2)(x-\sqrt5)(x+\sqrt5)\geqslant0$

Решим неравенство методом интервалов.

Выберем промежутки, которые удовлетворяют знаку неравенства, и запишем ответ.

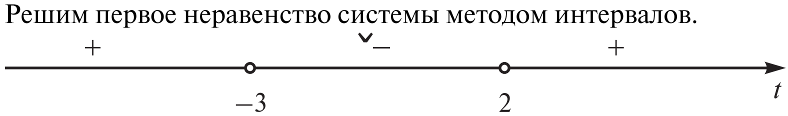
Ответ: $x\in\left(-\infty;-\sqrt5\right]\cup[-2;2]\cup\left[\sqrt5;+\infty\right)$.

б) $x^4+x^2-6<0$

Сделаем замену $x^2=t$ (при этом $t\geqslant0$). В результате этой замены получим систему из квадратного неравенства $t^2+t-6<0$ и линейного неравенства $t\geqslant0$.

$\begin{cases}t^2+t-6<0\\ t\geqslant0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(t+3)(t-2)<0\\ t\geqslant0\end{cases}$

Решим первое неравенство системы методом интервалов.



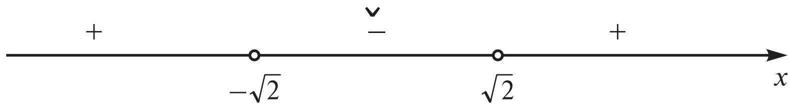
$t\in(-3;2)$.

Учитывая второе условие системы, получаем: $t \in [0; 2)$.

Вернувшись к «старому» неизвестному, получим двойное неравенство: $0 \leqslant x^2 < 2$.

Перейдем к системе двух квадратных неравенств:

$$\begin{cases} x^2 \geqslant 0 \\ x^2 < 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \boldsymbol{R} \\ (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2}) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \boldsymbol{R} \\ x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2}) \end{cases} \Leftrightarrow x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$$



Ответ: $x \in (-\sqrt{2}; \sqrt{2})$.

в) $x^4 + 5x^2 + 7 > 0$

Сделаем замену $x^2 = t$ (при этом $t \geqslant 0$). В результате этой замены получим систему из квадратного неравенства $t^2 + 5t + 7 > 0$ и линейного неравенства $t \geqslant 0$.

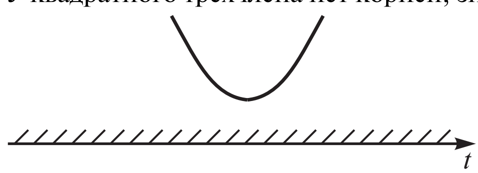
$$\begin{cases} t^2 + 5t + 7 > 0 \\ t \geqslant 0 \end{cases}$$

Решим первое неравенство системы:

$t^2 + 5t + 7 = 0$

$D = 25 - 4 \cdot 1 \cdot 7 = -3 < 0$

У квадратного трехчлена нет корней, значит:



Тогда $t \in \boldsymbol{R}$, учитывая второе условие системы, получаем: $t \in [0; +\infty)$.

Вернувшись к «старому» неизвестному, получим неравенство:

$x^2 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \in (-\infty; +\infty)$.

Ответ: $x \in (-\infty; +\infty)$.

Замечание: при решении последнего неравенства можно было сразу заметить, что первые два слагаемых неотрицательны при всех x, а третье — положительно, поэтому вся сумма в левой части положительна и неравенство выполняется при всех x.

№ 243.

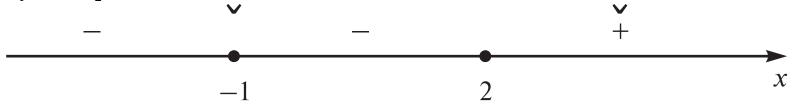
а) $x^3 - 3x - 2 \geqslant 0$

Разложим левую часть неравенства на множители, применяя метод группировки и формулы сокращенного умножения:

$x^3 - 3x - 2 = x^3 - 4x + x - 2 = x(x^2 - 4) + (x - 2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 1) =$
$= (x - 2)(x + 1)^2$.

Решим преобразованное неравенство методом интервалов:

$x_1 = 2$, $x_2 = -1$.



Ответ: $x \in \{-1\} \cup [2; +\infty)$.

б) $\dfrac{x^3 - 2x - 4}{x^2 - 7x + 12} \leqslant 0$

Разложим числитель и знаменатель дробного выражения на множители:

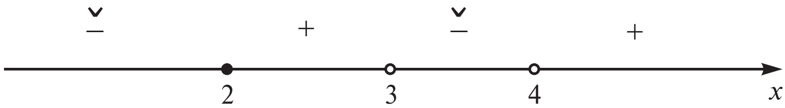
1) $x^3 - 2x - 4 = x^3 - 4x + 2x - 4 = x(x^2 - 4) + 2(x - 2) = (x - 2)(x^2 + 2x + 2)$ (обращаем внимание на то, что квадратный трехчлен $x^2 + 2x + 2$ не раскладывается на множители, так как у него нет корней, и он принимает только положительные значения);

2) $x^2 - 7x + 12 = (x - 3)(x - 4)$, так как 3 и 4 — корни квадратного трехчлена.

Решим полученное неравенство методом интервалов:

$$\frac{(x-2)(x^2+2x+2)}{(x-3)(x-4)} \leqslant 0 \Big| :(x^2+2x+2), \text{ т.к. } (x^2+2x+2) > 0 \text{ при } x \in \boldsymbol{R}.$$

$$\frac{x-2}{(x-3)(x-4)} \leqslant 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-2)(x-3)(x-4) \leqslant 0 \\ x \neq 3 \\ x \neq 4 \end{cases}$$



Ответ: $x \in (-\infty; 2] \cup (3; 4)$.

в) $\dfrac{x^4-5x^2+4}{x^3-8} > 0$

Разложим числитель и знаменатель дробного выражения на множители:

1) $x^4 - 5x^2 + 4 = (x^2 - 1)(x^2 - 4) = (x - 1)(x + 1)(x - 2)(x + 2)$;

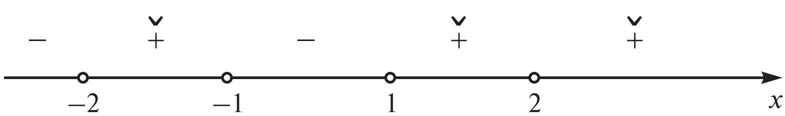
2) $x^3 - 8 = (x - 2)(x^2 + 2x + 4)$ (обращаем внимание на то, что квадратный трехчлен $x^2 + 2x + 4$ не раскладывается на множители, так как у него нет корней, и он принимает только положительные значения);

Решим полученное неравенство методом интервалов:

$$\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-2)(x^2+2x+4)} > 0$$

Домножим обе части неравенства на $x^2 + 2x + 4$, при этом знак неравенства не изменится т.к. $x^2 + 2x + 4 > 0$ при $x \in \boldsymbol{R}$.

$$\frac{(x-1)(x+1)(x-2)(x+2)}{(x-2)} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} (x-1)(x+1)(x-2)^2(x+2) > 0 \\ x \neq 2 \end{cases}.$$

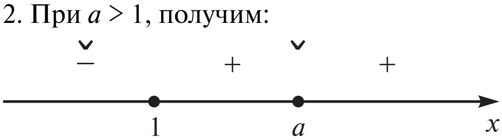


Ответ: $x \in (-2; -1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$.

№ 244.

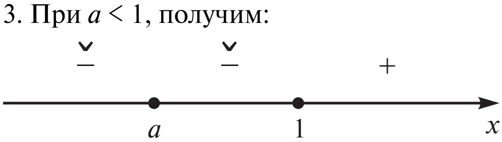
1. При $a = 1$ получим неравенство $(x - 1)^3 \leqslant 0$, решениями которого являются все числа $x \leqslant 1$.

2. При $a > 1$, получим:



решениями неравенства являются все числа $x \leqslant 1$, $x = a$.

3. При $a < 1$, получим:



решениями неравенства являются все числа $x \leqslant 1$.

Ответ: при $a > 1$ решением неравенство является $x \in (-\infty;1] \cup \{a\}$;

при $a \leqslant 1$ решением неравенство является $x \in (-\infty;1]$.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 259.*

Раскроем скобки в обеих частях неравенства и проведем равносильные преобразования:

$3(1 + a^2 + a^4) \geqslant (1 + a + a^2)^2$

$3 + 3a^2 + 3a^4 \geqslant 1 + a^2 + a^4 + 2a + 2a^2 + 2a^3$

$2 + 2a^4 \geqslant 2a + 2a^3$

$1 + a^4 \geqslant a + a^3$

$1 - a - a^3 + a^4 \geqslant 0$

$1 - a - a^3(1 - a) \geqslant 0$

$(1 - a^3)(1 - a) \geqslant 0$

$(1 - a)^2(1 + a + a^2) \geqslant 0$

Справедливость последнего неравенства очевидна.

Замечание: второй способ доказательства может быть основан на применении тождества: $1 + a^2 + a^4 = (1 + a + a^2)\,(1 - a + a^2)$

П. 4.4.3. Деление многочленов и теорема Безу. Схема Горнера

Основные содержательные цели.

1) Доказать теорему Безу и сформировать умение применять ее для нахождения остатка от деления многочлена $P(x)$ на линейное выражение $x - \alpha$.

2) Познакомить учащихся со способом деления многочленов по схеме Горнера.

3) Тренировать умение решать неравенства высших степеней. Закрепить умение решать задачи на геометрическую прогрессию.

Для **самостоятельной формулировки гипотезы** о способе нахождения остатка от деления $P(x)$ на линейное выражение $x - \alpha$ рекомендуется выполнить № 260.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 261.

Прежде чем делить в «столбик», надо данный многочлен записать в стандартном виде: $x^3 - 5x + 2 = x^3 + 0 \cdot x^2 - 5x + 2$

а) Разделим многочлен $x^3 + 0 \cdot x^2 - 5x + 2$ на $x - 5$:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + 0 \cdot x^2 - 5x + 2 & x - 5 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3 - 5x^2} & x^2 + 5x + 20 \\
\qquad 5x^2 - 5x & \\
\qquad -\underline{5x^2 - 25x} & \\
\qquad\qquad 20x + 2 & \\
\qquad\qquad -\underline{20x - 100} & \\
\qquad\qquad\qquad 102 &
\end{array}$$

Ответ: $(x^2 + 5x + 20)(x - 5) + 102$.

б) Разделим многочлен $x^3 + 0 \cdot x^2 - 5x + 2$ на $x - 2$:

$$\begin{array}{l|l}
x^3 + 0 \cdot x^2 - 5x + 2 & x - 2 \\ \cline{2-2}
-\underline{x^3 - 2x^2} & x^2 + 2x - 1 \\
\qquad 2x^2 - 5x & \\
\qquad -\underline{2x^2 - 4x} & \\
\qquad\qquad -x + 2 & \\
\qquad\qquad -\underline{-x + 2} & \\
\qquad\qquad\qquad 0 &
\end{array}$$

Ответ: $(x^2 + 2x - 1)(x - 2)$.

в) Разделим многочлен $x^3 + 0 \cdot x^2 - 5x + 2$ на $x^2 + 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0 \cdot x^2 - 5x + 2 & x^2 + 0 \cdot x + 1 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3 + 0 \cdot x^2 + x} & x \\ -6x + 2 & \end{array}$$

Ответ: $x(x^2 + 1) - 6x + 2$.

г) Разделим многочлен $x^3 + 0 \cdot x^2 - 5x + 2$ на $x^2 + 2x + 2$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0 \cdot x^2 - 5x + 2 & x^2 + 2x + 2 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3 + 2x^2 + 2x} & x - 2 \\ -2x^2 - 7x + 2 & \\ -\underline{-2x^2 - 4x - 4} & \\ -3x + 6 & \end{array}$$

Ответ: $(x - 2)(x^2 + 2x + 2) - 3x + 6$.

д) Разделим многочлен $x^3 + 0 \cdot x^2 - 5x + 2$ на $x^3 - 3x^2 + 2x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 0 \cdot x^2 - 5x + 2 & x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3 - 3x^2 + 2x - 1} & 1 \\ 3x^2 - 7x + 3 & \end{array}$$

Ответ: $1 \cdot (x^3 - 3x^2 + 2x - 1) + 3x^2 - 7x + 3$.

№ 262.

Для нахождения остатка от деления многочлена на многочлен применим теорему Безу.

а) $P(x) = x^5 - 3x^3 - 3x + 5;\ x - \alpha = x - 3$

$r = P(3) = 3^5 - 3 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3 + 5 = 3^2 \cdot (3^3 - 3^2 - 1) + 5 = 9 \cdot 17 + 5 = 158$.

Ответ: $r = 158$.

б) $P(x) = x^5 - 3x^3 - 3x + 5;\ x - \alpha = x - 2$

$r = P(2) = 2^5 - 3 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2 + 5 = 2 \cdot (2^4 - 3 \cdot 2^2 - 3) + 5 = 2 \cdot 1 + 5 = 7$.

Ответ: $r = 7$.

г) $P(x) = x^5 - 3x^3 - 3x + 5;\ x - \alpha = x + 1$

$r = P(-1) = (-1)^5 - 3 \cdot (-1)^3 - 3 \cdot (-1) + 5 = -1 + 3 + 3 + 5 = 10$.

Ответ: $r = 10$.

№ 263.

Многочлен $P(x) = x^{20} + ax^3 + 5$ делится на $x - 1$, если остаток от деления равен нулю. Тогда по теореме Безу $P(1) = 1^{20} + a \cdot 1^3 + 5 = 0$, отсюда $a = -6$.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 277.*

Пусть $P(x) = (x - 1)(x - 2)Q(x) + ax + b$. Тогда, $ax + b$ дает остаток 3 при делении на $x - 1$, и остаток 2 при делении на $x - 2$. Заметим, что

$$ax + b = a(x - 1) + b + a,$$

$$ax + b = a(x - 2) + b + 2a.$$

Значит,

$$\begin{cases} b + a = 3 \\ b + 2a = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 \\ b = 4 \end{cases}.$$

Поэтому остаток при делении многочлена $P(x)$ на многочлен $(x - 1)(x - 2)$ равен $ax + b = 4 - x$.

Ответ: $4 - x$.

П. 4.4.4. Еще один способ решения уравнений высших степеней

Основные содержательные цели.

1) Доказать следствие теоремы Безу и познакомить учащихся с его применением для разложения многочлена на множители.

2) Построить способ понижения порядка уравнения высших степеней и сформировать умение его применять.

3) На основании теоремы о рациональных корнях алгебраических уравнений с целыми коэффициентами сформулировать приемы поиска рациональных корней.

4) Тренировать умение находить остаток от деления многочлена $P(x)$ на линейное выражение $x - \alpha$. Закрепить умение решать системы линейных уравнений с двумя неизвестными. Повторить формулы сокращенного умножения.

Для **самостоятельного открытия** способа разложения на множители и его применения для решения уравнений высших степеней рекомендуется выполнить № 278 — № 279.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 280.

Решим уравнения методом понижения порядка уравнения.

а) $x^3 + 7x^2 + 7x - 15 = 0$

1. Если $x = 1$, то $1^3 + 7 \cdot 1^2 + 7 \cdot 1 - 15 = 0$ верно, то есть 1 — корень уравнения.

2. Разделим многочлен $x^3 + 7x^2 + 7x - 15$ на $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 7x^2 + 7x - 15 & x - 1 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3 - x^2 } & x^2 + 8x + 15 \\ 8x^2 + 7x & \\ -\underline{8x^2 - 8x } & \\ 15x - 15 & \\ -\underline{15x - 15} & \\ 0 & \end{array}$$

Запишем уравнение, применяя следствие из теоремы Безу:

$(x^2 + 8x + 15)(x - 1) = 0$

Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 + 8x + 15$:

$x_1 = -5$; $x_2 = -3$.

Итак, корни исходного уравнения: $\left[\begin{array}{l} x = -5 \\ x = -3 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Ответ: $\{-5; -3; 1\}$.

б) $x^3 - 4x^2 - 9x + 36 = 0$

1. Если $x = 3$, то $3^3 - 4 \cdot 3^2 - 9 \cdot 3 + 36 = 0$ верно, то есть 3 — корень уравнения.

2. Разделим многочлен $x^3 - 4x^2 - 9x + 36$ на $x - 3$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 4x^2 - 9x + 36 & x - 3 \\ \cline{2-2} -\underline{x^3 - 3x^2 } & x^2 - x - 12 \\ -x^2 - 9x & \\ -\underline{-x^2 + 3x } & \\ -12x + 36 & \\ -\underline{-12x + 36} & \\ 0 & \end{array}$$

Запишем уравнение, применяя следствие из теоремы Безу:

$(x^2 - x - 12)(x - 3) = 0$

Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - x - 12$:

$x_1 = 4$; $x_2 = -3$.

Итак, корни исходного уравнения: $\left[\begin{array}{l} x=-3 \\ x=3 \\ x=4 \end{array}\right.$

Ответ: $\{-3; 3; 4\}$.

в) $x^3 + 5x^2 + 7x + 3 = 0$

1. Если $x = -1$, то $(-1)^3 + 5 \cdot (-1)^2 + 7 \cdot (-1) + 3 = 0$ верно, то есть -1 — корень уравнения.

2. Разделим многочлен $x^3 + 5x^2 + 7x + 3$ на $x + 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 5x^2 + 7x + 3 & x + 1 \\ \cline{2-2} -\ \underline{x^3 + x^2 \quad\quad\quad\quad} & x^2 + 4x + 3 \\ 4x^2 + 7x \quad\ & \\ -\ \underline{4x^2 + 4x \quad\ } & \\ 3x + 3 & \\ -\ \underline{3x + 3} & \\ 0 & \end{array}$$

Запишем уравнение, применяя следствие из теоремы Безу:

$(x^2 + 4x + 3)(x + 1) = 0$

Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 + 4x + 3$:

$x_1 = -1$; $x_2 = -3$.

Итак, корни исходного уравнения: $\left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=-3 \end{array}\right.$

Ответ: $\{-1; -3\}$.

г) $x^3 - x^2 - 16x + 16 = 0$

1. Если $x = 1$, то $1^3 - 1^2 - 16 \cdot 1 + 16 = 0$ верно, то есть 1 — корень уравнения.

2. Разделим многочлен $x^3 - x^2 - 16x + 16$ на $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - x^2 - 16x + 16 & x - 1 \\ \cline{2-2} -\ \underline{x^3 - x^2 \quad\quad\quad\quad\quad} & x^2 + 0x - 16 \\ 0x^2 - 16x \quad\ & \\ -\ \underline{0x^2 - 0x \quad\quad} & \\ -16x + 16 & \\ -\ \underline{-16x + 16} & \\ 0 & \end{array}$$

Запишем уравнение, применяя следствие из теоремы Безу:

$(x^2 - 16)\ (x - 1) = 0$

Найдем корни квадратного трехчлена x^2-16:

$x_1 = -4$; $x_2 = 4$.

Итак, корни исходного уравнения: $\left[\begin{array}{l} x=-4 \\ x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

Ответ: $\{-4; 1; 4\}$.

е) $x^3 - 6x^2 + 9x - 4 = 0$

1. Если $x = 1$, то $1^3 - 6 \cdot 1^2 + 9 \cdot 1 - 4 = 0$ верно, то есть 1 — корень уравнения.

2. Разделим многочлен $x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ на $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l} x^3 - 6x^2 + 9x - 4 & x - 1 \\ \cline{2-2} -\ \underline{x^3 - x^2 \quad\quad\quad\quad} & x^2 - 5x + 4 \\ -5x^2 + 9x \quad\ & \\ -\ \underline{-5x^2 + 5x \quad\ } & \\ 4x - 4 & \\ -\ \underline{4x - 4} & \\ 0 & \end{array}$$

Запишем уравнение, применяя следствие из теоремы Безу:

$(x^2 - 5x + 4)(x - 1) = 0$

Найдем корни квадратного трехчлена $x^2-5x + 4$:

$x_1 = 4; x_2 = 1.$

Итак, корни исходного уравнения: $\left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=4 \end{array}\right.$

Ответ: {1; 4}.

и) $x^3 - 7x^2 + 11x - 5 = 0$

1. Если $x = 1$, то $1^3 - 7 \cdot 1^2 + 11 \cdot 1 - 5 = 0$ верно, то есть 1 — корень уравнения.

2. Разделим многочлен $x^3 - 7x^2 + 11x - 5$на $x - 1$:

$$\begin{array}{r|l}
x^3-7x^2+11x-5 & x-1 \\ \hline
-\quad \underline{x^3-x^2} \qquad\qquad & x^2-6x+5 \\
-6x^2+11x \qquad & \\
-\quad \underline{-6x^2+6x} \qquad & \\
5x-5 & \\
-\quad \underline{5x-5} & \\
0 &
\end{array}$$

Запишем уравнение, применяя следствие из теоремы Безу:

$(x^2 - 6x + 5)(x - 1) = 0$

Найдем корни квадратного трехчлена $x^2 - 6x + 5$:

$x_1 = 5; x_2 = 1.$

Итак, корни исходного уравнения: $\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x=1 \end{array}\right.$

Ответ: {1; 5}.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 292.*

В силу следствия из теоремы Безу достаточно проверить лишь, что

$P(0) = P(-1) = P(-0,5) = 0.$

Ответ: верно.

П.4.4.5.* Бином Ньютона. Общие формулы сокращенного умножения

Основные содержательные цели.

1) Построить и доказать формулу бинома Ньютона, сформировать умение ее использовать.

2) Построить общие формулы сокращенного умножения и сформировать умение применять их для решения уравнений и неравенств высших степеней.

3) Тренировать умение решать уравнения методом понижения порядка уравнения. Закрепить умение решать системы линейных уравнений с тремя неизвестными.

Для актуализации использования формул сокращенного умножения для решения уравнений рекомендуется использовать № 293—295. Для выявления нехватки известных формул и организации их открытия рекомендуется выполнить № 296.

№ 295.

а) $x^3 + 9x^2 + 27x + 27 = x^3 + 3 \cdot 3x^2 + 3 \cdot 3^2 \cdot x + 3^3 = (x + 3)^3 = 0$. Значит, $x = -3$.

б) $(2x-1)^2-25=(2x-1)^2-5^2=(2x-1-5)(2x-1+5)=(2x-6)(2x+4)=0$. Значит, $x=3$ или $x=-2$.

Ответ: а) $\{-3\}$; б) $\{3; -2\}$.

№ 296.

Домножим левую часть уравнения на $(x-1)$:

$(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)=x^7-1$.

$x^7-1=0$ только если $x=1$, но единица, очевидно, не является корнем исходного уравнения. Значит, корней нет.

Ответ: решений нет**.**

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 297.

а) $x^4-8x^3+24x^2-32x+16=(x-2)^4=0$. Значит, $x=2$.

б) $(x-4)^5+10(x-4)^4+40(x-4)^3+80(x-4)^2+80(x-4)+32=((x-4)+2)^5=$ $=(x-2)^5=0$. Значит, $x=2$.

в) $(x+2)^4-4(x+2)^3+6(x+2)^2-4(x+2)+1=((x+2)-1)^4=(x+1)^4=16$. Значит, $x+1=\pm2$. То есть $x=1$ или $x=-3$.

Ответ: а) $\{2\}$; б) $\{2\}$; в) $\{1; -3\}$

№ 298.

Например, C_{123456}^{1}.

Ответ: да.

№ 299.

Каждое слагаемое имеет вид $C_{100}^{k}\sqrt{2^k}\sqrt[4]{3^{100-k}}$. Для того, чтобы слагаемое было целым k должно быть четным, а $(100-k)$ должно делиться на 4. Значит, слагаемое будет целым для всех k кратных 4. От 0 до 100 есть 26 чисел, кратных 4.

Ответ: 26.

№ 300.

Левая часть равна $(1-3)^{100}=2^{100}$, а правая — $(1-5)^{50}=4^{50}=2^{100}$.

№ 301.

По условию

$$\begin{cases} nx^{n-1}y=240 \\ \dfrac{n(n-1)}{2}x^{n-2}y^2=720 \\ \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6}x^{n-3}y^3=1080 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} nx^{n-1}y=240 \\ \dfrac{240(n-1)y}{2x}=720 \\ \dfrac{720(n-2)y}{3x}=1080 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} nx^{n-1}y=240 \\ (n-1)y=6x \\ (n-2)y=4{,}5x \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} nx^{n-1}y=240 \\ (n-1)y=6x \\ y=1{,}5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1{,}5nx^{n}=240 \\ n-1=4 \\ y=1{,}5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^5=160 \\ n=5 \\ y=1{,}5x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ n=5 \\ y=3 \end{cases}.$$

Ответ: $x=2$, $y=3$, $n=5$.

№ 302.

$C_p^k=\dfrac{p!}{k!(p-k)!}$. Если p — простое число и $1\leqslant k\leqslant p-1$, то числитель делится на p, а знаменатель — нет. Значит, дробь $\dfrac{p!}{k!(p-k)!}$ не может сократиться на p. Но C_p^k — целое число, поэтому оно делится на p.

№ 303.

$11^{100}-1=(10+1)^{100}-1=10^{100}+100\cdot10^{99}+4950\cdot10^{98}+\ldots+161700\cdot10^3+$

$+ 4950 \cdot 10^2 + 100 \cdot 10 + 1 - 1 = (10^{97} + 100 \cdot 10^{96} + 4950 \cdot 10^{95} + \ldots + 161700 + 495 + 1) \cdot 1000 =$ $= \ldots 6000$, так как в скобках все слагаемые кроме двух последних делятся на 10.

Ответ: на три нуля.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 311.*

Легко заметить, что знаменатели чисел, расположенных в рядах гармонического треугольника, пропорциональны элементам треугольника Паскаля, причем коэффициентами пропорциональности служат граничные члены. То есть, где в треугольнике Паскаля стоит число C_n^k, в треугольнике Лейбница находится $\frac{1}{(n+1)C_n^k}$. Докажем это. Если $k = 0$, или $k = n$, то $\frac{1}{(n+1)C_n^k} = \frac{1}{n+1}$. Осталось проверить равенство:

$$\frac{1}{(n+1)C_n^k} = \frac{1}{(n+2)C_{n+1}^k} + \frac{1}{(n+2)C_{n+1}^{k+1}}$$

$$\frac{k!(n-k)!}{(n+1)\cdot n!} = \frac{k!(n+1-k)!}{(n+2)\cdot(n+1)!} + \frac{(k+1)!(n-k)!}{(n+2)\cdot(n+1)!}$$

$$1 = \frac{(n-k)+1}{n+2} + \frac{k+1}{n+2}.$$

Последнее равенство очевидно.

Ответ: там, где в треугольнике Паскаля стоит число C_n^k, в треугольнике Лейбница находится $\frac{1}{(n+1)C_n^k}$.

§ 5. Системы нелинейных уравнений

П.4.5.1. Решение систем способом подстановки и сложения

Основные содержательные цели.

1) Сформировать умение решать системы нелинейных уравнений способом подстановки и сложения.

2) Тренировать умение применять общие формулы сокращенного умножения. Закрепить умение решать дробно-рациональные уравнения.

Для **самостоятельного открытия** способа решения нелинейных уравнений рекомендуется выполнить № 312 — № 313.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 314.

Решаем уравнения методами подстановки и алгебраического сложения.

а) $$\begin{cases} x+y=3 \\ x^3+x^2y=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x^2(x+y)=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x^2\cdot 3=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x^2=4 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+y=3 \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y=3 \\ x=-2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=1 \\ x=2 \end{cases} \\ \begin{cases} y=5 \\ x=-2 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: (–2; 5), (2; 1).

б)

$$\begin{cases} 2x-y=4 \\ 4x^2-y^2=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=4 \\ (2x-y)(2x+y)=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=4 \\ 4(2x+y)=32 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x-y=4 \\ 2x+y=8 \end{cases} \oplus \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 4 \\ 4x = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}$$

Ответ: (3; 2).

в)

$$\begin{cases} x^2 + y^5 = 4 \\ 6x + 2x^2 + 3y^5 = 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2x^2 - 2y^5 = -8 \\ 6x + 2x^2 + 3y^5 = 12 \end{cases} \oplus \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^5 = 4 \\ 6x + y^5 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^5 = 4 - x^2 \\ 6x + 4 - x^2 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^5 = 4 - x^2 \\ 6x - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^5 = 4 - x^2 \\ x(6 - x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^5 = 4 - x^2 \\ x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y^5 = 4 - x^2 \\ x = 6 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^5 = 4 \\ x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y^5 = -32 \\ x = 6 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = \sqrt[5]{4} \\ x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -2 \\ x = 6 \end{cases} \end{array} \right.$$

Ответ: $\left(0; \sqrt[5]{4}\right)$, (6; –2).

г)

$$\begin{cases} x^2 + y = 4 \\ x^4 + 10y = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - x^2 \\ x^4 + 10(4 - x^2) = 31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 4 - x^2 \\ x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$x^4 + 10x^2 + 9 = 0$

Пусть $x^2 = t$.

$t^2 - 10t + 9 = 0$

$t_1 = 1$, $t_2 = 9$

Вернемся к неизвестному x:

$x^2 = 1$ $\quad\quad\quad\quad$ $x^2 = 9$

$x_1 = 1$ или $x_2 = -1$; $\quad$ $x_1 = 3$ или $x_2 = -3$.

Теперь система двух уравнений “распадается” на две системы:

$$\begin{cases} y = 4 - x^2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = -1 \end{array} \right. \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y = 4 - x^2 \\ \left[\begin{array}{l} x = 3 \\ x = -3 \end{array} \right. \end{cases}.$$

Решим каждую из них:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = 3 \end{cases} \end{array} \right. \text{ и } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 3 \\ y = -5 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -3 \\ y = -5 \end{cases} \end{array} \right..$$

Ответ: (–1; 3), (1; 3), (3; –5), (–3; –5).

д)

$$\begin{cases} y^2 + 1 - x = 0 \\ y^2 + y^3 = xy \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 + 1 - x = 0 \\ y\left(y + y^2 - x\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y^2 + 1 - x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2 + 1 - x = 0 \\ y + \left(y^2 - x\right) = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} y^2 + 1 - x = 0 \\ y + (-1) = 0 \end{cases} \end{array} \right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \end{array} \right..$$

Ответ: (1; 0), (2; 1).

№ 315.

а) Применим метод подстановки:

$$\begin{cases} x = 4 - y \\ \dfrac{x + 2}{y - 3} + \dfrac{y + 2}{x - 3} = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 - y \\ \dfrac{6 - y}{y - 3} + \dfrac{y + 2}{1 - y} = -8 \end{cases}.$$

Решим дробно-рациональное уравнение:

$$\frac{6-y^{|1-y}}{y-3}+\frac{y+2^{|y-3}}{1-y}+\frac{8^{|-y^2+4y-3}}{1}=0$$

$$\frac{6-7y+y^2+y^2-y-6-8y^2+32y-24}{(y-3)(1-y)}=0 \Leftrightarrow \begin{cases} y^2-4y+4=0 \\ y\neq 3 \\ y\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (y-2)^2=0 \\ y\neq 3 \\ y\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=2 \\ y\neq 3 \\ y\neq 1 \end{cases}$$

Вернемся к решению исходной системы:

$$\begin{cases} x=4-y \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}.$$

Ответ: (2; 2).

б) $$\begin{cases} (x-2)(y-3)=1 \\ \dfrac{x-2}{y-3}=1 \end{cases}$$

Используем метод замены неизвестного: пусть $x-2=a$, $y-3=b$.
Решим систему двух уравнений относительно a и b:

$$\begin{cases} a\cdot b=1 \\ \dfrac{a}{b}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a\cdot b=1 \\ a=b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b^2=1 \\ a=b \end{cases} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} b=1 \\ b=-1. \end{array}\right. \\ a=b \end{cases}$$

Система “распадается” на две системы:

$$\begin{cases} b=1 \\ a=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} b=-1 \\ a=-1 \end{cases}.$$

Вернемся к неизвестным x и y:

$$\begin{cases} y-3=1 \\ x-2=1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y-3=-1 \\ x-2=-1 \end{cases}.$$

Решим каждую систему:

$$\begin{cases} y=4 \\ x=3 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=2 \\ x=1 \end{cases}.$$

Ответ: (3; 4), (1; 2).

в) $$\begin{cases} \dfrac{4}{x}+\dfrac{6}{y}=1\dfrac{1}{6} \\ \dfrac{3}{x}-\dfrac{4}{y}=\dfrac{1}{6} \end{cases}$$

Используем метод замены неизвестного: пусть $\frac{1}{x}=a$, $\frac{1}{y}=b$.

Решим систему двух уравнений относительно a и b:

$$\begin{cases} 4a+6b=\dfrac{7}{6} \\ 3a-4b=\dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+10b=1 \\ 3a-4b=\dfrac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+10b=1 \\ 18a-24b=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=1-10b \\ 18(1-10b)-24b=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a=1-10b \\ b=\dfrac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\dfrac{1}{6} \\ b=\dfrac{1}{12} \end{cases}.$$

Вернемся к неизвестным x и y:

$$\begin{cases} \frac{1}{x} = \frac{1}{6} \\ \frac{1}{y} = \frac{1}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = 12 \end{cases}.$$

Ответ: (6; 12).

№ 316.

а) $\begin{cases} x^2 - 4y^2 = 0 \\ xy + x^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)(x+2y) = 0 \\ xy + x^2 = 6 \end{cases}.$

Система “распадается” на две системы:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ xy + x^2 = 6 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ xy + x^2 = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y \\ y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -2y \\ y^2 = 3 \end{cases}.$$

Каждая из полученных систем распадается еще на две системы:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 1 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = -2 \\ y = -1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = -2\sqrt{3} \\ y = \sqrt{3} \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x = 2\sqrt{3} \\ y = -\sqrt{3} \end{cases}.$$

Ответ: (2; 1), (–2; –1), $\left(-2\sqrt{3};\sqrt{3}\right)$, $\left(2\sqrt{3};-\sqrt{3}\right)$.

б) Умножим первое уравнение на 2, а втрое на –3, получим

$$\begin{cases} 4x + 6xy = 4y + 26 \\ -3x + 6xy = -3y + 12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 7x = 7y + 14 \\ 2xy + y = x + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y + 2 \\ 2y(y+2) + y = y + 2 + 4 \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$2y^2 + 4y + y = y + 6 \Leftrightarrow y^2 + 2y - 3 = 0 \Leftrightarrow y_1 = 1$ и $y_2 = -3$, тогда $x_1 = 3$ и $x_2 = -1$.

Ответ: (3;1), (–1; –3).

в) $\begin{cases} x^2 - xy = x \\ y^2 + 2xy = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x-y-1) = 0 \\ y^2 + 2xy = 1 \end{cases}$

Система “распадается” на две системы:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + 2xy = 1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x - y - 1 = 0 \\ y^2 + 2xy = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = y + 1 \\ y^2 + 2(y+1)y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x = y + 1 \\ 3y^2 + 2y - 1 = 0 \end{cases}$$

Решим второе уравнение системы:

$3y^2 + 2y - 1 = 0$

$D = 4 + 12 = 16 > 0$

$$y_1 = \frac{2+4}{6} = \frac{1}{3}, \; y_2 = \frac{-2-4}{6} = -1.$$

Вернемся к системе уравнений:

$$\begin{cases} x = \frac{4}{3} \\ y = \frac{1}{3} \end{cases} \text{ или } \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Ответ: (0; 1), (0; –1), $\left(\frac{4}{3};\frac{1}{3}\right)$.

№ 317.

Если во втором зале x рядов и в каждом ряду по y мест, тогда в первом зале $(x + 2)$ рядов по $(y - 4)$ мест в каждом ряду. По условию известно, что в первом зрительном зале 320 мест, а во втором — 360 мест.

Количество рядов и мест в каждом ряду определяется положительным числом. Составим математическую модель:

$$\begin{cases}(x+2)(y-4)=320\\ xy=360\\ x>0\\ y>4\end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}x\text{ — ?}\\ (x+2)\text{ — ?}\end{matrix}}$$

Решим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases}(x+2)(y-4)=320\\ xy=360\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}xy+2y-4x-8=320\\ xy=360\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}360+2y-4x-8=320\\ xy=360\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}y=2x-16\\ x(2x-16)=360\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2x-16\\ x^2-8x-180=0\end{cases}$$

Решим квадратное уравнение $x^2 - 8x - 180 = 0$: $x_1 = 18$, $x_2 = -10$ (по теореме, обратной теореме Виета).

Второй корень не удовлетворяет математической модели, так как $x > 0$.

Для решения первого уравнения системы используем только первый корень:

$$\begin{cases}y=2\cdot 8-16\\ x=18\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=20\\ x=18\end{cases}$$

$20 > 4$ истинно.

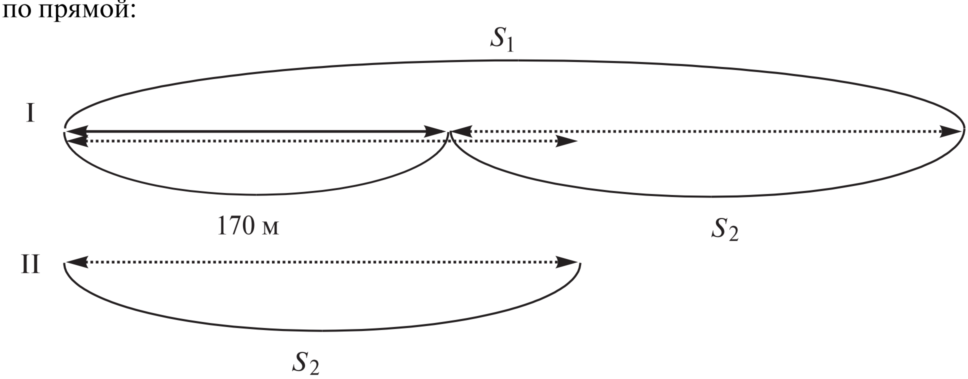
Ответим на вопрос задачи.

Во втором зале было 18 рядов, а в первом — 20 рядов.

Ответ: 20 рядов и 18 рядов.

№ 318.

Удобно для наглядности движение по окружности “развернуть” в движение по прямой:



Путь первого содержит в себе весь путь второго велосипедиста и длину круговой дороги.

Скорости велосипедистов определяются положительными числами. Составим математическую модель:

$$\begin{cases}10x+10y=170\\ 170x-170y=170\\ x>0\\ y>0\end{cases} \longrightarrow \boxed{\begin{matrix}x\text{ — ?}\\ y\text{ — ?}\end{matrix}}$$

Решим систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} x+y=17 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+1+y=17 \\ x=y+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=8 \\ x=9 \end{cases}$$

8 > 0 истинно, 9 > 0 истинно.

Ответим на вопрос задачи. Скорость второго велосипедиста 8м/с, а первого — 9 м/с.

Ответ: 8м/с и 9 м/с.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 332*.

Перемножив все три уравнения, получим $(xyz)^2 = 16$. Значит, $xyz = 4$ или $xyz = -4$.

Если $xyz = 4$, то $x=\dfrac{xyz}{yz}=\dfrac{4}{2}=2$, $y=\dfrac{xyz}{zx}=\dfrac{4}{8}=\dfrac{1}{2}$, $z=\dfrac{xyz}{xy}=\dfrac{4}{1}=4$.

Если же $xyz = -4$, то $x=\dfrac{xyz}{yz}=\dfrac{-4}{2}=-2$, $y=\dfrac{xyz}{zx}=\dfrac{-4}{8}=-\dfrac{1}{2}$, $z=\dfrac{xyz}{xy}=\dfrac{-4}{1}=-4$.

Ответ: {(2; 0,5; 4), (–2;–0,5; –4)}.

П. 4.5.2. Другие способы решения систем нелинейных уравнений с двумя неизвестными

Основные содержательные цели.

1) Сформировать умение решать системы нелинейных уравнений методом замены неизвестного.

2) Сформировать понятие полного однородного уравнения второй степени относительно x, y.

3) Построить способ решения системы уравнений с полным однородным уравнением второй степени и сформировать умение его применять.

4) Тренировать умение решать системы нелинейных уравнений с помощью способа постановки или сложения. Закрепить умение применять теорему, обратную теорему Виета.

Для **самостоятельного открытия** способа решения системы уравнений с полным однородным уравнением второй степени рекомендуется выполнить № 333 — № 334.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 335.

Для решения систем уравнений применим алгоритм решения системы с полным однородным уравнением второй степени относительно x, y.

а) $$\begin{cases} 2x^2-xy-3y^2=0 \\ x^2-3xy+2y^2=-1 \end{cases}$$

1. Проверим, является ли решение полного однородного уравнения (0; 0) решением системы: 0 = –1 ложно.

2. Так как $y \neq 0$, разделим однородное уравнение на y^2:

$$2\left(\frac{x}{y}\right)^2-\left(\frac{x}{y}\right)-3=0$$

3. Обозначим отношение $\dfrac{x}{y}$ неизвестным t и решим полученное квадратное уравнение: $2t^2 - t - 3 = 0$.

$D = 1 + 4 \cdot 2 \cdot 3 = 25 > 0$, два корня.

$t_1 = \frac{1-5}{4} = -1$, $t_2 = \frac{1+5}{4} = 1{,}5$

4. Найдя значение отношения $\frac{x}{y}$, выразим из этого равенства x через y:

$\frac{x}{y} = -1 \quad \Leftrightarrow \quad x = -y$ или $\frac{x}{y} = 1{,}5 \quad \Leftrightarrow \quad x = 1{,}5y$

5, 6. Подставим выражение x через y во второе уравнение системы и решим систему, пользуясь полученным уравнением с одним неизвестным:

$\begin{cases} x = -y \\ x^2 - 3xy + 2y^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y^2 + 3y^2 + 2y^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y \\ y^2 = -\frac{1}{6} \end{cases} \Leftrightarrow$ нет решений, т.к. $y^2 > 0$ при $y \in \boldsymbol{R}$, $y \neq 0$.

$$\begin{cases} x = 1{,}5y \\ \frac{9}{4}y^2 - 3 \cdot \frac{3}{2}y^2 + 2y^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1{,}5y \\ -\frac{1}{4}y^2 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1{,}5y \\ y^2 = 4 \end{cases}$$

Система “распадается” на две системы:

$\begin{cases} x = 3 \\ y = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \end{cases}$

Ответ: (3; 2), (–3;–2).

б) Ни одно из уравнений системы $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 3 \\ 2x^2 - 2xy - y^2 = -6 \end{cases}$ не является однородным. Но если первое уравнение умножить на 2 и сложить его со вторым уравнением, то получим полное однородное уравнение второй степени относительно x, y:

$2x^2 - 6xy + 4y^2 + 2x^2 - 2xy - y^2 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 8xy + 3y^2 = 0$.

Оставим первое уравнение системы без изменений, а другое заменим на полученное. Имеем систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 3 \\ 4x^2 - 8xy + 3y^2 = 0 \end{cases}$$

Убедимся в том, что пара (0; 0) не удовлетворяет первому уравнению системы ($0 \neq 3$), значит, эта пара чисел не является решением системы.

Можем разделить обе части однородного уравнения на y^2, получим

$$4\left(\frac{x}{y}\right)^2 - 8\left(\frac{x}{y}\right) + 3 = 0.$$

Обозначив $t = \frac{x}{y}$, получим квадратное уравнение $4t^2 - 8t + 3 = 0$.

$D = 64 - 4 \cdot 4 \cdot 3 = 16 > 0$, два корня.

$t_1 = \frac{8-4}{8} = \frac{1}{2}$, $t_2 = \frac{8+4}{8} = \frac{3}{2}$

Система “распадается” на две системы:

$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 3 \\ y = 2x \end{cases}$ и $\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 3 \\ x = 1{,}5y \end{cases}$

Решим каждую из полученных систем.

$$\begin{cases} x^2 - 3xy + 2y^2 = 3 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 6x^2 + 8x^2 = 3 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \end{array} \right.$$

$$\begin{cases} x^2-3xy+2y^2=3 \\ x=1{,}5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{9}{4}y^2-3\cdot\frac{3}{2}y^2+2y^2=3 \\ x=1{,}5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{1}{4}y^2=3 \\ x=1{,}5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=-12 \\ x=1{,}5y \end{cases}$$

нет решений, т.к. $y^2 > 0$ при $y \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Ответ: $(-1; -2)$, $(1; 2)$.

№ 336.

Анализируя уравнения данной системы, видим повторяющиеся выражения. Введем два новых неизвестных: пусть $\sqrt{x^2+y^2}=t$, а $xy = p$.

Решим систему уравнений с новыми неизвестными t и p:

$$\begin{cases} (t^2-p)t=185 \\ (t^2+p)t=65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^3-tp=185 \\ t^3+tp=65 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t=5 \\ p=-12 \end{cases}$$

Вернемся к “старым” неизвестным:

$$\begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}=5 \\ xy=-12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=25 \\ x=\frac{-12}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4-25y^2+144=0 \\ x=\frac{-12}{y} \\ y\neq 0 \end{cases}$$

Решим биквадратное уравнение.

Пусть $y^2 = m$.

Тогда $m^2 - 25m + 144 = 0$

$D = 625 - 4 \cdot 144 = 49 > 0$, два корня.

$m_1=\frac{25-7}{2}=9$, $m_2=\frac{25+7}{2}=16$

Вернемся к неизвестному y.

$y^2 = 9$ или $y^2 = 16$

$y_1 = 3$ $\quad$ $y_1 = 4$

$y_2 = -3$ $\quad$ $y_2 = -4$

Решение системы “распадается” на четыре системы:

$$\begin{cases} y=3 \\ x=-4 \\ y\neq 0 \end{cases}, \begin{cases} y=-3 \\ x=4 \\ y\neq 0 \end{cases}, \begin{cases} y=4 \\ x=-3 \\ y\neq 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y=-4 \\ x=3 \\ y\neq 0 \end{cases}$$

Ответ: $(-4; 3)$, $(4; -3)$, $(-3; 4)$, $(3; -4)$.

№ 337.

а) Анализируя уравнения данной системы, видим повторяющиеся выражения. Введем два новых неизвестных: пусть $\frac{1}{x+y}=a$, а $\frac{1}{x-y}=b$.

Решим систему уравнений с новыми неизвестными a и b:

$$\begin{cases} 6a+5b=7 \\ 3a-2b=-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a+5b=7 \\ -6a+4b=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b=1 \\ a=\frac{1}{3} \end{cases}$$

Вернемся к “старым” неизвестным:

$$\begin{cases} \frac{1}{x+y}=\frac{1}{3} \\ \frac{1}{x-y}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

Ответ: $(2; 1)$.

б) Преобразуем выражения в левой части каждого уравнения так, чтобы получить повторяющиеся выражения:

1. $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 2 = (x^2 + 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) - 4 = (x + 1)^2 + (y - 1)^2 - 4$.

2. $2x^2 - y^2 + 4x + 2y - 7 = 2(x^2 + 2x + 1) - (y^2 - 2y + 1) - 2 + 1 - 7 = 2(x + 1)^2 - (y - 1)^2 - 8$.

Для решения системы уравнений $\begin{cases}(x+1)^2+(y-1)^2-4=0\\2(x+1)^2-(y-1)^2-8=0\end{cases}$ введем новые неизвестные: пусть $x + 1 = m$ и $y - 1 = n$. Тогда решим систему уравнений относительно m и n.

$$\begin{cases}m^2+n^2-4=0\\2m^2-n^2-8=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m^2=4\\n^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}m=2\\n=0\end{cases}\\ \begin{cases}m=-2\\n=0\end{cases}\end{array}\right.$$

Возвращаясь к “старым” неизвестным, имеем две системы:

$\begin{cases}x+1=2\\y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}$ и $\begin{cases}x+1=-2\\y-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-3\\y=1\end{cases}$

Ответ: (1; 1), (–3; 1).

№ 339.

Преобразуем выражения в левой части каждого уравнения так, чтобы получить повторяющиеся выражения:

1. $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2) = (x - y)(x^2 - 2xy + y^2 + 3xy) = (x - y)((x - y)^2 + 3xy)$.

2. $x^2y - xy^2 = xy(x - y)$.

Для решения системы уравнений $\begin{cases}(x-y)^3+3xy(x-y)=7\\xy(x-y)=2\end{cases}$ введем новые неизвестные: пусть $x - y = a$ и $xy = b$. Тогда решим систему уравнений относительно a и b.

$$\begin{cases}a^3+3ab=7\\ab=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^3+3\cdot 2=7\\b=\dfrac{2}{a}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=2\end{cases}.$$

Вернемся к “старым” неизвестным x и y.

$$\begin{cases}x-y=1\\xy=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y+1\\(y+1)y=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=y+1\\y^2+y-2=0\end{cases}.$$

Решениями уравнения $y^2 + y - 2 = 0$ являются числа $y_1 = -2$, $y_2 = 1$.

Значит, решениями системы уравнений будут две пары чисел:

если $y = -2$, то $x = -1$, а если $y = 1$, то $x = 2$.

Ответ: (–1; –2), (2; 1).

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 349.*

Первый способ.

$$\begin{cases}x+y=2\\xy-z^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2-x\\2x-x^2-z^2=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2-x\\(x-1)^2+z^2=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=2-x\\x=1\\z=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y=1\\x=1\\z=0\end{cases}.$$

Второй способ.

Так как $xy = z^2 + 1$, то x и y одного знака, но $x + y = 2$. Значит, они положительны. Тогда из неравенства о средних имеем

$$1=\frac{x+y}{2}\geqslant\sqrt{xy}=\sqrt{z^2+1}\geqslant 1\,.$$

Оба неравенства должны обратиться в равенство. Значит, $x = y = 1$, $z = 0$.

Ответ: (1; 1; 0).

П. 4.5.3.* Симметрические системы уравнений

Основные содержательные цели.

1) Сформировать понятие симметрической системы.

2) Построить способ решения симметрических систем и сформировать умение его применять.

3) Тренировать умение решать системы нелинейных уравнений с полным однородным уравнением. Повторить способ округления числа до указанного разряда.

Для **самостоятельного открытия** способа решения симметрических систем рекомендуется выполнить № 350 — № 352.

№ 351.

а) $(x + y)^2 + xy = u^2 + v$;

б) $3(x + y) - 2xy = 3u - 2v$;

в) $4x + 4y - 6xy = 4u - 6v$;

г) $x^2y + xy^2 = xy(x + y) = uv$;

д) $x^2 + y^2 = (x + y)^2 - 2xy = u^2 - 2v$.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 353.

а) Преобразуем систему и сделаем замену $u = x + y$, $v = xy$:

$$\begin{cases}(x^2-x)(y^2-y)=72\\(x+1)(y+1)=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2y^2-xy(x+y)+xy=72\\xy+(x+y)+1=20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v^2-uv+v=72\\v+u+1=20\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=19-v\\v^2-(19-v)v+v=72\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=19-v\\2v^2-18v-72=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=19-v\\v^2-9v-36=0\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u=19-v\\\left[\begin{array}{l}v=-3\\v=12\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}v=-3\\u=22\end{cases}\\\begin{cases}v=12\\u=7\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}xy=-3\\x+y=22\end{cases}\\\begin{cases}xy=12\\x+y=7\end{cases}\end{array}\right..$$

Если $x + y = 22$, $xy = -3$, то числа x, y являются корнями уравнения $t^2 - 22t - 3 = 0$, то есть $x=-11+\sqrt{13}$, $y=-11-\sqrt{13}$, или $x=-11-\sqrt{13}$, $y=-11+\sqrt{13}$.

Если же $x + y = 7$, $xy = 12$, то числа x, y являются корнями уравнения $t^2 - 7t + 12 = 0$, то есть $x = 3$, $y = 4$ или $x = 4$, $y = 3$.

б) Преобразуем систему и сделаем замену $u = x + y$, $v = xy$:

$$\begin{cases}x^4+x^2y^2+y^4=91\\x^2-xy+y^2=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2=91\\(x+y)^2-3xy=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(u^2-2v\right)^2-v^2=91\\u^2-3v=7\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}u^2=3v+7\\(v+7)^2-v^2=91\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u^2=3v+7\\14v+49=91\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}v=3\\u^2=16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}xy=3\\x+y=\pm4\end{cases}.$$

Если $x + y = 4$, $xy = 3$, то числа x, y являются корнями уравнения $t^2 - 4t + 3 = 0$, то есть $x = 1$, $y = 3$ или $x = 3$, $y = 1$.

Если же $x + y = -4$, $xy = 3$, то числа x, y являются корнями уравнения $t^2 + 4t + 3 = 0$, то есть $x = -1$, $y = -3$ или $x = -3$, $y = -1$.

в) Преобразуем систему и сделаем замену $u = x + y$, $v = xy$:

$$\begin{cases}31(x^3+y^3)=7(x^5+y^5)\\ x^2-xy+y^2=7\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}31(x+y)(x^2-xy+y^2)=7(x+y)(x^4-x^3y+x^2y^2-xy^3+y^4)\\ x^2-xy+y^2=7\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}31(x+y)=(x+y)\Big(\left(x^2+y^2\right)^2-x^2y^2-xy\left(x^2+y^2\right)\Big)\\ \left(x+y\right)^2-3xy=7\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u\Big(\left(u^2-2v\right)^2-v^2-v\left(u^2-2v\right)-31\Big)=0\\ u^2-3v=7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u^2=3v+7\\ \left[\begin{array}{l}u=0\\ \left(v+7\right)^2-v^2-v\left(v+7\right)=31\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}u^2=3v+7\\ \left[\begin{array}{l}u=0\\ v^2-7v-18=0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u^2=3v+7\\ \left[\begin{array}{l}u=0\\ v=-2\\ v=9\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}u=0\\ v=-\dfrac{7}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}v=-2\\ u=\pm1\end{cases}\\ \begin{cases}v=9\\ u=\pm\sqrt{34}\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+y=0\\ xy=-\dfrac{7}{3}\end{cases}\\ \begin{cases}xy=-2\\ x+y=\pm1\end{cases}\\ \begin{cases}xy=9\\ x+y=\pm\sqrt{34}\end{cases}\end{array}\right..$$

Если $x + y = 0$, $xy = -\dfrac{7}{3}$, то либо $x = \sqrt{\dfrac{7}{3}}$, $y = -\sqrt{\dfrac{7}{3}}$, либо $x = -\sqrt{\dfrac{7}{3}}$, $y = \sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

Если $x + y = 1$, $xy = -2$, то числа x, y являются корнями уравнения $t^2 - t - 2 = 0$, то есть $x = -1$, $y = 2$ или $x = 2$, $y = -1$.

Если $x + y = -1$, $xy = -2$, то числа x, y являются корнями уравнения $t^2 + t - 2 = 0$, то есть $x = 1$, $y = -2$ или $x = -2$, $y = 1$.

Если же $x+y=\pm\sqrt{34}$, $xy = 9$, то числа x, y являются корнями уравнения $t^2 \mp\sqrt{34}t+9=0$, которое не имеет решений.

Ответ. а) (3; 4), (4; 3); б) (1;3), (3;1), (–1; –3), (–3; –1); в) (–1;2), (2;–1); (–2;1), (1;–2), $\left(\sqrt{\dfrac{7}{3}};-\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right)$, $\left(-\sqrt{\dfrac{7}{3}};\sqrt{\dfrac{7}{3}}\right)$.

Из **раздела для повторения** рекомендуется выполнить № 355–356, которые готовят учащихся к изучению следующего пункта. Отметим, что учитель может предложить учащимся и задание № 354, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 359.*

Умножим первое уравнение на 13, второе на 37 и вычтем их друг из друга. Тогда получится уравнение

$$(24x^2+50xy+24y^2)\sqrt{x^2+y^2}=0.$$

Заметим, что пара (0; 0) не является решением системы. Поэтому $\sqrt{x^2+y^2}\neq 0$, сократив на $2\sqrt{x^2+y^2}$, получаем однородное уравнение

$$12x^2+25xy+12y^2=0.$$

Разделим уравнение на y^2 ($y \neq 0$, так как иначе $x = 0$, а пара (0; 0) решением системы не является) и сделаем замену $t=\dfrac{x}{y}$:

$$12t^2+25t+12=0 \quad \Leftrightarrow \quad t_1=-\frac{4}{3}, t_2=-\frac{3}{4}.$$

Если $t=-\frac{4}{3}$, то $x=-\frac{4}{3}y$. Подставим во второе уравнение системы:

$$\left(\frac{16}{9}-\frac{4}{3}+1\right)y^2\sqrt{\left(\frac{16}{9}+1\right)y^2}=65 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{13}{9}\cdot\frac{5}{3}|\,y\,|^3=65 \quad \Leftrightarrow \quad |\,y\,|^3=27.$$

То есть $y = \pm\, 3$. Получаем решения (–4; 3) и (4; –3).

Если же $t=-\frac{3}{4}$, то $y=-\frac{4}{3}x$. И, аналогично, получаем еще два решения (–3; 4) и (3; –4).

Ответ: (3; 4), (4; 3), (–3; –4), (–4; –3).

§ 6. Приближенное решение уравнений

П.4.6.1. Приближенные вычисления. Абсолютная и относительная погрешность

Основные содержательные цели.

1) Сформировать понятия абсолютной и относительной погрешности и сформировать умение применять их.

2) Тренировать умение решать системы нелинейных уравнений.

Для **самостоятельного открытия** понятия абсолютной и относительной погрешности рекомендуется выполнить № 361 — № 363. Выполняя задание № 361, учащиеся актуализируют свои представления о приближенных значениях величин. При этом учитель получает возможность обсудить не только математическую сторону анализируемых предложений, но и их экологический смысл.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 364.

а) Приближенное значение $\tilde{x}$ = 53° + 65° + 121° + 126° = 365°. Как известно, точное значение суммы углов четырехугольника равно 360°, значит x = 360°.

Тогда абсолютная погрешность $\Delta x = |\,x-\tilde{x}\,|$ = |360° – 365°|= 5°.

Ответ: 5°.

б) x = 4895, $\tilde{x}$ =5000, $\Delta x = |\,x-\tilde{x}\,|$ = |4895 – 5000|= 105 (человек).

Ответ: 105 человек.

в) x = 1,67 м, $\tilde{x}$ =1,7 м, $\Delta x = |\,x-\tilde{x}\,|$ = |1,67 – 1,7|= 0,03 (м) = 3 (см).

Ответ: 3 см.

№ 365.

а) $x^{\sim} = 6{,}022 \cdot 10^{23}$. Заметим, что данное приближенное значение может быть и приближением по избытку, и приближением по недостатку. Значит, применяя правила округления десятичных дробей, получим, что $x \in [6{,}0215 \cdot 10^{23}; 6{,}0225 \cdot 10^{23})$. Отсюда ясно, что абсолютная погрешность $\Delta x = |\,x-\tilde{x}\,| \leqslant 0{,}0005 \cdot 10^{23} = 5 \cdot 10^{19}$.

б) $t \approx 150$ человек; точное значение t нам неизвестно, но, так как $t \in (100; 200)$, то $\Delta\, t = |\,t-\tilde{t}\,| < 50$.

№ 366.

364.а) Так как Δx = 5°, а $\tilde{x}$ = 365°, то $\delta x=\frac{\Delta x}{|\,\tilde{x}\,|}=\left(\frac{5}{365}\cdot 100\right)\% \approx 1{,}4\%$;

364.б) Так как Δx = 105 чел., а $\tilde{x}$ = 5000 чел., то $\delta x=\frac{\Delta x}{|\,\tilde{x}\,|}=\left(\frac{105}{5000}\cdot 100\right)\% = 2{,}1\%$;

364.в) Так как Δx = 3 см, а $\tilde{x}$ = 170 см, то $\delta x=\frac{\Delta x}{|\,\tilde{x}\,|}=\left(\frac{3}{170}\cdot 100\right)\% \approx 1{,}8\%$;

365.а) Так как $\Delta x = 5 \cdot 10^{22}$, а $\tilde{x} = 6{,}022 \cdot 10^{26}$, то

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|\tilde{x}|} = \left(\frac{5 \cdot 10^{22}}{6{,}022 \cdot 10^{26}} \cdot 100\right)\% \approx \frac{0{,}8 \cdot 100}{10^4} \approx 0{,}008\%;$$

365.б) Так как $\Delta x = 50$ чел., а $\tilde{x} = 150$ чел., то $\delta x = \frac{\Delta x}{|\tilde{x}|} = \left(\frac{50}{150} \cdot 100\right)\% \approx 33\%$;

Ответ: а) 1,4%; б) 2%; в) 2%; а) 0,008%; б) 33%.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 375.*

Заметим, что

$$\frac{k^3-1}{k^3+1} = \frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)} = \frac{(k-1)(k(k+1)+1)}{(k+1)(k(k-1)+1)}$$

Поэтому

$$\frac{37}{55} = \frac{2^3-1}{2^3+1} \cdot \frac{3^3-1}{3^3+1} \cdot \ldots \cdot \frac{n^3-1}{n^3+1} = \frac{1 \cdot (2 \cdot 3+1)}{3 \cdot (1 \cdot 2+1)} \cdot \frac{2 \cdot (3 \cdot 4+1)}{4 \cdot (2 \cdot 3+1)} \cdot \ldots \cdot \frac{(n-1)(n(n+1)+1)}{(n+1)(n(n-1)+1)} =$$

$$= \frac{1 \cdot 2 \cdot (n(n+1)+1)}{n(n+1)(1 \cdot 2+1)} = \frac{2(n(+1)+1)}{3n(n+1)} \quad \Leftrightarrow \quad 110n(n+1)+110 = 111n(n+1).$$

$$\Leftrightarrow \quad n(n+1) = 110 \quad \Leftrightarrow \quad n^2+n-110 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} n = 10 \\ n = -11 \end{array}\right..$$

Учитывая, что n натуральное число, получаем единственный ответ $n = 10$.

Ответ: 10.

П. 4.6.2.* Погрешность суммы, разности, произведения и частного

Основные содержательные цели.

1) Сформировать умение вычислять погрешность суммы, разности, произведения и частного.

2) Тренировать умение вычислять абсолютную и относительную погрешность. Закрепить умение решать задачи на геометрическую прогрессию.

Для **самостоятельного открытия** способа вычисления погрешности суммы рекомендуется выполнить № 376.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 377.

Приближенное значение площади равно $\tilde{S} = \tilde{a}\tilde{b} = 11{,}7 \cdot 13{,}4 = 156{,}78$ м^2, где a — длина первой стороны, а b — длина второй стороны. Относительная погрешность этого приближенного значения $\delta S \leqslant \delta a + \delta b$, где

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|\tilde{a}|} \leqslant \frac{0{,}1+0{,}1+0{,}1+0{,}1}{11{,}7} = \frac{0{,}4}{11{,}7} \approx 0{,}034,$$

$$\delta b = \frac{\Delta b}{|\tilde{b}|} \leqslant \frac{0{,}1+0{,}1+0{,}1+0{,}1+0{,}1}{13{,}4} = \frac{0{,}5}{13{,}4} \approx 0{,}037.$$

Значит, $\delta S \leqslant 0{,}071$. Поэтому, $\Delta S = \delta S \cdot |\tilde{S}| \leqslant 0{,}071 \cdot 156{,}78 \approx 11$ м^2. При абсолютной ошибке порядка 10 разумно приближенное значение округлить до целых. В итоге получаем,

$S = 157 \pm 11$ м^2.

Ответ: 157 ± 11 м^2

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 385.*

Найдем разность между соседними членами:

$$\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}-\frac{a^2+b^2}{a+b}=\frac{a^4+a^3b+ab^3+b^4-a^4-2a^2b^2-b^4}{(a+b)(a^2+b^2)}=\frac{a^3b+ab^3-2a^2b^2}{(a+b)(a^2+b^2)}=\frac{ab(a-b)^2}{(a+b)(a^2+b^2)},$$

$$\frac{a^4+b^4}{a^3+b^3}-\frac{a^3+b^3}{a^2+b^2}=\frac{a^6+a^4b^2+a^2b^4+b^6-a^6-2a^3b^3-b^6}{(a^2+b^2)(a^3+b^3)}=\frac{a^4b^2+a^2b^4-2a^3b^3}{(a^2+b^2)(a^3+b^3)}=$$

$$=\frac{a^2b^2(a-b)^2}{(a^2+b^2)(a^3+b^3)}.$$

Предположим, что $a \neq b$, тогда

$$\frac{ab(a-b)^2}{(a+b)(a^2+b^2)}=\frac{a^2b^2(a-b)^2}{(a^2+b^2)(a^3+b^3)} \Leftrightarrow \frac{1}{a+b}=\frac{ab}{a^3+b^3} \Leftrightarrow a^3+b^3=a^2b+ab^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2(a-b)=b^2(a-b) \Leftrightarrow a^2=b^2,$$

но a и b положительные, значит $a = b$. Противоречие.

П. 4.6.3.* Приближенное решение уравнений

Основные содержательные цели.

1) Сформировать представление о выполнении теоремы Больцано-Коши.

2) Построить метод половинного деления для нахождения приближенного решения уравнения $f(x) = 0$ и сформировать умение его применять.

3) Закрепить умение решать задачи на геометрическую прогрессию.

Рекомендуется **организовать введение нового** материала с помощью подводящего диалога или использования текста учебника.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№ 386.

Рассмотрим функцию, стоящую в левой части уравнения $f(x) = x^2 - 3x - 5$.

$f(0)=-5;\ f(1)=-7;\ f(2)=-7;\ f(3)=-5;\ f(4)=-1;\ f(5)=5.$

Так как $f(4) < 0$, а $f(5) > 0$, то уравнение имеет корень на интервале (4; 5).

Применим процесс половинного деления к отрезку $[4;5]$. Так как нам нужно найти значение корня c с точностью до $\Delta = 0{,}1$, то делить пополам отрезок нужно до тех пор, пока длина соответствующего отрезка не станет меньше $2\Delta = 0{,}2$.

1-й шаг: $x_1 = 4{,}5;\ f\left(\frac{9}{2}\right)=\left(\frac{9}{2}\right)^2-3\cdot\frac{9}{2}-5=\frac{81-54-20}{4}=\frac{7}{4}>0$.

Первый отрезок “половинного деления»: $[4;4{,}5]$; его длина равна 0,5.

2-й шаг: $x_1 = 4{,}25;\ f\left(\frac{17}{4}\right)=\left(\frac{17}{4}\right)^2-3\cdot\frac{17}{4}-5=\frac{289-204-80}{16}=\frac{5}{16}>0$.

Второй отрезок: [4; 4,25]; его длина равна 0,25.

3-й шаг: $x_3 = 4{,}125;\ f\left(\frac{33}{8}\right)=\left(\frac{33}{8}\right)^2-3\cdot\frac{33}{8}-5=\frac{1089-792-320}{64}=-\frac{23}{64}<0$.

Третий отрезок: $\left[4\frac{1}{8};4\frac{1}{4}\right]$; его длина равна 0,125.

Нужная точность достигнута. Корень лежит на отрезке [4,125; 4,25]. Искомым значением корня уравнения с точностью до 0,1 является число $c = 4{,}2$.

Ответ: $x \approx 4{,}2$.

№ 387.

Функция, стоящая в левой части уравнения $f(x) = 5 - x^3 - 2x$ — строго убывающая функция на всей числовой прямой (функции $-x^3$ и $5 - 2x$ строго убывают, а $f(x)$ — их сумма). Значит, уравнение $5 - x^3 - 2x = 0$ не может иметь более одного корня.

$f(0)=5;\ f(1)=2;\ f(2)=-7$.

Так как $f(1) > 0$, а $f(2) < 0$, то уравнение имеет корень на интервале (1; 2); в силу строгого убывания функции f этот корень единственен.

Применим процесс половинного деления к отрезку [1; 2]. Так как нам нужно найти значение корня c с точностью до $\Delta = 0{,}1$, то делить пополам отрезок нужно до тех пор, пока длина соответствующего отрезка не станет меньше $2\Delta = 0{,}2$.

1-й шаг: $x_1 = 1{,}5$; $f\left(\frac{3}{2}\right)=5-\left(\frac{3}{2}\right)^3-2\cdot\frac{3}{2}=\frac{40-27-24}{8}=-\frac{11}{8}<0$.

Первый отрезок “половинного деления»: [1; 1,5]; его длина равна 0,5.

2-й шаг: $x_2 = 1{,}25$; $f\left(\frac{5}{4}\right)=5-\left(\frac{5}{4}\right)^3-2\cdot\frac{5}{4}=\frac{320-125-160}{64}=\frac{35}{64}>0$.

Второй отрезок: $\left[\frac{5}{4};\frac{3}{2}\right]$; его длина равна 0,25.

3-й шаг: $x_3=\frac{11}{8}$; $f\left(\frac{11}{8}\right)=5-\left(\frac{11}{8}\right)^3-2\cdot\frac{11}{8}=\frac{2560-1331-1408}{512}=-\frac{179}{512}<0$.

Третий отрезок: $\left[\frac{5}{4};\frac{11}{8}\right]$; его длина равна 0,125.

Нужная точность достигнута. Корень лежит на отрезке [1,25; 1,375]. Искомым значением корня уравнения с точностью до 0,1 является число $c = 1{,}3$.

Ответ: $x \approx 1{,}3$.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№ 395.*

Из условия следует, что

$$\left(3x+\frac{1}{y^3}\right)-\left(2x+\frac{1}{y^2}\right)=\left(2x+\frac{1}{y^2}\right)-\left(x+\frac{1}{y}\right)=1 \quad\Leftrightarrow\quad x+\frac{1-y}{y^3}=x+\frac{1-y}{y^2}=1 \quad\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\dfrac{1-y}{y^3}=\dfrac{1-y}{y^2}\\ x=1-\dfrac{1-y}{y^2}\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}\left[\begin{array}{l} y=1\\ y^3=y^2\neq 0\end{array}\right.\\ x=1-\dfrac{1-y}{y^2}\end{cases} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{cases}y=1\\ x=1\end{cases}.$$

Ответ: $x = 1$, $y = 1$.

Глава 5.* Тригонометрические функции числового аргумента

С целью подготовки учащихся к углубленному изучению тригонометрии в старших классах в пятой главе рассматриваются элементы этого раздела, доступные девятиклассникам. Учащиеся осваивают понятия синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла, учатся вычислять по известному значению одной из тригонометрических функций значения остальных тригонометрических функций, выполняют преобразования тригонометрических выражений, используя тригонометрические тождества и формулы.

В первом параграфе вводится понятие угла, как меры поворота, а также радианная мера угла. Здесь учащиеся вспоминают известные им из курса геометрии понятия синуса, косинуса, тангенса, котангенса острого угла прямоугольного треугольника, а также понятия синуса, косинуса, тангенса, котангенса для угла от 0° до 180°, и расширяют их для произвольных углов. Понятия синуса и косинуса рассматриваются теперь как координаты точки тригонометрической окружности, полученной в результате поворота точки P (0; 1), а тангенс и котангенс как отношения синуса и косинуса. Отметим, что в курсе вводится понятие тригонометрической функции, однако делается это лишь с целью знакомства учащихся с новым классом функций и упрощения терминологии, а не с целью детального изучения их свойств и графиков (эти задачи будут решаться в старшей школе). Здесь же учащиеся выявляют знаки функций по четвертям и знакомятся с основными свойствами тригонометрических функций, достаточными для вывода тригонометрических тождеств и формул приведения.

Во втором параграфе учащиеся выводят основные формулы тригонометрии, на основании которых проводят тригонометрические преобразования. Учащиеся знакомятся со следующими формулами: формулы синуса суммы и разности, формулы косинуса суммы и разности; формулы приведения, формулы двойного, тройного и половинного угла, формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и суммы в произведение. Отметим, что в курсе вводятся общие формулы приведения и формулируются специальные правила для их запоминания.

Характеристика деятельности учащихся

При изучении содержания пятой главы учащиеся:

- *применяют* изученные способы действий для решения задач в типовых и поисковых ситуациях;
- *обосновывают* правильность выполненного действия с помощью обращения к общему алгоритму, определению, свойству, формуле, тождеству;
- *расширяют* понятие угла, понятия синуса, косинуса, тангенса, котангенса для произвольного угла, пользуясь фундаментальным принципом развития математической теории;
- *выявляют* основные свойства тригонометрических функций;
- *анализируют* тригонометрические выражения с целью упрощения проведения их преобразования;
- *доказывают* тригонометрические тождества с применением тригонометрической окружности;
- *выводят* новые тригонометрические формулы с использованием уже доказанных тождеств и уже известных формул;
- *применяют тригонометрические тождества и формулы* для выполнения преобразований тригонометрических выражений;
- *применяют тригонометрические тождества и формулы* для вычисления значений тригонометрических выражений.

Особенности изучения учебного содержания

При изучении пятой главы планированием предусмотрены уроки ОНЗ, структура которых обеспечивает выполнение учащимися целого комплекса универсальных учебных действий. Рассмотрим способ организации урока ОНЗ на примере содержания пункта 5.1.1 «Измерения углов и дуг в радианах».

В этом пункте учащиеся знакомятся с понятием угла, как меры поворота, понятием радиана, как определенного угла поворота, знакомятся с радианной мерой угла, учатся переводить величину угла из градусной меры в радианную и обратно.

Урок открытия новых знаний выстраивается в соответствии с требованиями технологии деятельностного метода Л.Г. Петерсон (см. раздел Приложение). На этапе *мотивации* учитель может обсудить с учащимися слова Галилео Галилея о значении геометрии и сообщить о том, что понятия, открытые ими на уроках геометрии, станут отправной точкой для изучения нового раздела математики под название тригонометрия, который «вырос» из геометрических представлений древних ученых.

После чего учитель организует актуализацию нужных для открытия знаний с помощью выполнения заданий (№406). Для проблематизации и самостоятельного расширения понятия угла рекомендуется использовать задания №407 – №408.

Рассмотрим пример *структуры открытия нового знания*.

1. Новое знание: понятие угла, как меры поворота

2. Актуализация.

Повторить: движение по кругу (№406), понятие угла, как части плоскости, заключенной между двумя лучами, выходящими из одной точки.

3. Задание на пробное действие.

Объясните, что представляют собой углы из задания № 407 (д, е).

4. Фиксация затруднения.

Я не могу объяснить, что представляют собой углы, градусная мера которых больше развернутого угла или отрицательна.

Я не могу обосновать, что мой ответ верный.

5. Фиксация причины затруднения.

Не известно определение углов, градусная мера которых больше развернутого угла или отрицательна.

6. Цель учебной деятельности.

Узнать, как определяются углы, градусная мера которых больше развернутого угла или отрицательна.

7. Фиксация нового знания.

Учащиеся должны построить понятие угла, как меры поворота.

Открыть новое знание учащиеся с использованием текста задания № 408.

На *этапе первичного закрепления* рекомендуется предложить учащимся указать, где окажется луч после поворота на 380° и – 90°, для *самостоятельной работы* учащимся можно предложить построить угол – 135° и 3600°.

На *этапе включения в систему знаний* учитель вводит понятие радиана, знакомит учащихся с радианной мерой угла, после чего учащиеся выполняют задания №409, 411 – №417.

Для *повторения* можно выполнить, например, № 418. На этапе *рефлексии* учащимся предлагается оценить процесс и результат своей работы на уроке.

Кроме урока открытия нового знания, основные структурные элементы которого рассмотрены выше, планированием предусмотрены и другие типы уроков: *уроки рефлексии тренировочного и коррекционного типа*, где учащиеся вырабатывают и закрепляют свое умение применять новые понятия и способы действий, учатся самостоятельно выявлять и исправлять свои ошибки, корректировать свою учебную деятельность.

В течение изучения пятой главы учащимся предлагается два экспресс-теста, которые можно использовать для урока рефлексии или в качестве домашней работы.

Планированием также предусмотрены и уроки *обучающего контроля*. Перед проведением контрольной работы рекомендуется провести урок рефлексии с использованием содержания соответствующего раздела «Задачи для самоконтроля».

§1. Тригонометрические функции и их основные свойства

П. 5.1.1. Измерения углов и дуг в радианах

Основные содержательные цели.

1) Сформировать понятие угла, как меры поворота.

2) Познакомить учащихся с радианной мерой угла, сформировать умение переводить величину угла из градусной меры в радианную и обратно.

3) Закрепить умение выполнять преобразования выражений с корнями и решать рациональные неравенства.

Для **проблематизации и самостоятельного расширения понятия** угла рекомендуется использовать задания №407 – №408. Для **самостоятельного знакомства** с понятием радиана рекомендуется использовать задания №409 – №410.

Еще раз подчеркнем, что учитель *выбирает только одно знание* для организации самостоятельного открытия этого знания учащимися, остальные знания вводятся учителем, например, путем подводящего диалога. Так, например, если самостоятельная деятельность учащихся будет направлена на расширения понятия угла, то понятие радиана вводит учитель. Если же учитель рассказывает о том, что угол можно рассматривать как меру поворота, то с понятием радиана и его использованием учащиеся знакомятся сами в процессе собственной учебной деятельности (выявляют проблему, ставят цель, выстраивают проект открытия и реализуют его в группах).

Приведем **пример решения задания** из данного пункта.

№418.

а) $x = 1$ рад $= \dfrac{180}{\pi}$, $\tilde{x} = 60°$,

$$\Delta x = |x - \tilde{x}| = \left|\frac{180}{\pi} - 60\right| \approx |57 - 60| = 3°;$$

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|} = \left(\frac{3}{57} \cdot 100\right)\% \approx 5\%.$$

б) $x = 1° = \dfrac{\pi}{180}$ рад, $\tilde{x} = 0{,}017$ рад,

$$\Delta x = |x - \tilde{x}| = \left|\frac{\pi}{180} - 0{,}017\right| \approx |\,0{,}0175 - 0{,}017\,| = 0{,}0005 \text{ рад};$$

$$\delta x = \frac{\Delta x}{|x|} = \left(\frac{0{,}0005}{0{,}0175} \cdot 100\right)\% \approx 3\%.$$

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№430.*

Сначала установим, сколько проходит времени между двумя моментами, когда минутная и часовая стрелка совпадают. Посмотрим на стрелки в 24 часа.

С 12 часов часовая стрелка сделает 1 круг, а минутная – 12. Значит, за эти 12 часов произойдет 11 совпадений. И каждое следующее совпадение происходит через $\frac{12}{11}$ часа. Таким образом, за это время минутная стрелка пройдет $\frac{12}{11}\cdot 360=\frac{4320}{11}=392\frac{8}{11}$ градусов.

Ответ: $\frac{4320}{11}=392\frac{8}{11}$ градусов.

П. 5.1.2. Тригонометрические функции числового аргумента

Основные содержательные цели.

1) Сформировать понятие синуса, косинуса, тангенса и котангенса произвольного угла.

2) Сформировать понятие тригонометрической окружности, тригонометрических функций.

3) Исследовать знаки тригонометрических функций в зависимости от того, в какой четверти лежит угол и сформировать умение определять знак тригонометрической функции в каждой из четвертей.

4) Повторить значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса для табличных углов от 0° до 180° (в градусах и в радианах).

5) Закрепить умение выполнять преобразования выражений с корнями.

Для **самостоятельного открытия** понятий синуса и косинуса, как координат точки тригонометрической окружности, полученной в результате поворота точки P (0; 1) рекомендуется выполнить №432. Так как при расширении понятия синуса и косинуса учащиеся будут основываться на известных им понятиях синуса и косинуса острого угла, необходимо повторить их (№431).

Для проведения **самостоятельного** исследования знаков тригонометрических функций в зависимости от того, в какой четверти лежит угол, рекомендуется выполнить №435. Так как при проведении этого исследования учащиеся будут опираться на определение понятий синуса, косинуса, тангенса и котангенса и знаки координат точки тригонометрической окружности, необходимо еще раз повторить это определение и выполнить №434.

Приведем **пример решения задания** из данного пункта.

№438.

Заметим, что $6{,}5\pi < 6{,}5\cdot 3{,}2 = 20{,}8 < 21 = 7\cdot 3 < 7\pi$. То есть $6{,}5\pi < 21 < 7\pi$. Значит, угол в 21 радиан лежит во II четверти. Поэтому $\sin 21 > 0$, $\cos 21 < 0$, $\operatorname{tg} 21 < 0$, $\operatorname{ctg} 21 < 0$.

Ответ. $\sin 21 > 0$, $\cos 21 < 0$, $\operatorname{tg} 21 < 0$, $\operatorname{ctg} 21 < 0$.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№448*.

Посмотрим на расположение каждой из стрелок в 13 ч 20 мин. Часовая стрелка находится между 1 и 2 часами и прошла $\frac{20}{60}=\frac{1}{3}$ расстояния между ними. Поэтому она повернута на $\left(1+\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{360^\circ}{12}=40^\circ$ по часовой стрелке относительно 12 часов.

Минутная стрелка относительно 12 часов по часовой стрелке повернута на $\frac{1}{3}\cdot 360° = 120°$. Поэтому искомый угол равен 120° – 40° = 80°.

Ответ: 80°.

П. 5.1.3. Свойства тригонометрических функций

Основные содержательные цели.

1) Познакомить учащихся с основными свойствами тригонометрических функций.

2) На основании доказанных свойств, сформулировать простейшие тригонометрические тождества и сформировать умение их применять.

3) Закрепить умение выполнять преобразования выражений с корнями.

Чтобы организовать **самостоятельное доказательство** выполнения основного тригонометрического тождества для синуса и косинуса произвольного числового аргумент рекомендуется выполнить №449.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№451.

а) $\sin^4\alpha + \cos^2\alpha - \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha - \cos^2\alpha)(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) + \cos^2\alpha =$
$= \sin^2\alpha - \cos^2\alpha + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$.

б) $\operatorname{tg}\alpha\cos^2\alpha - \operatorname{ctg}\alpha\sin^2\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha - \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\sin^2\alpha =$
$= \sin\alpha\cos\alpha - \cos\alpha\sin\alpha = 0$

Ответ: а) $\sin^2\alpha$; б) 0.

№452.

а) Заметим, что $\sin\alpha$ принимает значения от – 1 до 1 включительно. Значит, $|\sin\alpha|$ принимает значения от 0 до 1 включительно. Поэтому выражение $1 - |\sin\alpha|$ может принимать значения от 0 до 1 включительно.

б) Заметим, что $2\cos\alpha$ принимает значения от – 2 до 2 включительно. Значит, $1 + 2\cos\alpha$ принимает значения от –1 до 3 включительно. Поэтому выражение $|1 + 2\cos\alpha|$ может принимать значения от 0 до 3 включительно.

Ответ: а)[0; 1]; б)[0; 3].

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№459.*

Из теоремы Виета получаем $\sin\alpha\cos\alpha = \frac{c}{a}$ и $\sin\alpha + \cos\alpha = -\frac{b}{a}$. Нам требуется доказать равенство $b^2 = a^2 + 2ac$. Так как $a \neq 0$, то разделим это равенство на a^2. Нам нужно доказать равенство $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = 1 + 2\frac{c}{a}$.

Получаем $\left(\frac{b}{a}\right)^2 = (\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = \sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha =$
$1 + 2\frac{c}{a}$, что и требовалось.

П. 5.1.4. Выражение одних тригонометрических функций через другие

Основные содержательные цели.

1) Сформировать умение вычислять по известному значению одной из тригонометрических функций значения остальных тригонометрических функций

2) Закрепить умение выполнять построение графиков и определять свойства функции на примере функции $y = \sqrt[n]{x}$.

Чтобы учащиеся самостоятельно выразили одни тригонометрические функции через другие и попробовали применить полученные соотношения для вычисления значений этих функций рекомендуется выполнить №460 – №462.

Задания № 463 – №466 **данного пункта** выполняются согласно примерам, разобранным в тексте учебника.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№476.*

$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x \leqslant 1$. Причем значение 1 достигается, если $\sin x \cos x = 0$.

Ответ: 1.

§2. Основные формулы тригонометрии. Тригонометрические преобразования

5.2.1. Тригонометрические функции от суммы и разности двух чисел

Основные содержательные цели.

1) Построить формулы синуса суммы (разности) двух чисел, косинуса суммы (разности) двух чисел, тангенса суммы (разности) двух чисел, котангенса суммы (разности) двух чисел и сформировать умение их применять.

2) Закрепить умение решать тригонометрические уравнения.

Для **самостоятельного вывода** формул синуса и косинуса суммы или разности, а также формул тангенса и котангенса суммы или разности рекомендуется выполнить №477.

Приведем **пример решения задания** из данного пункта.

№481.

$\sin 20° \cos 25° + \sin 70° \cos 65° = \sin 20° \sin 65° + \cos 20° \cos 65° = \cos(65° - 20°) = \cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№490.*

Пусть в турнире участвовало x команд. Тогда требуемое количество встреч $\frac{x(x-1)}{2}$. После того, как к числу участников добавилась одна команда, количество команд стало $x+1$. Значит, требуемое количество встреч стало равным $\frac{(x+1)x}{2}$. По условию количество встреч, необходимых для проведения турнира, увеличилось на 20%. То есть оно увеличилось в 1,2 раза. Получим уравнение: $\frac{x(x-1)}{2}\cdot 1{,}2=\frac{(x+1)x}{2}$. Откуда $(x-1)\cdot 1{,}2 = x + 1$. То есть $x = 11$. Таким образом, после включения в турнир новой команды в первенстве участвовало $x + 1 = 12$ команд.

Ответ: 12 команд после включения в турнир новой команды.

П. 5.2.2. Формулы приведения

Основные содержательные цели.

1) Построить общие формулы приведения и сформировать умение их применять.

2) Закрепить умение решать тригонометрические уравнения.

Для **самостоятельного открытия** смысла формул приведения рекомендуется выполнить №491.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№497.

$$\frac{5\cos 145^\circ}{\cos 35^\circ}=\frac{5\cos(180^\circ-35^\circ)}{\cos 35^\circ}=\frac{-5\cos 35^\circ}{\cos 35^\circ}=-5.$$

№498.

$$\frac{3\cos(\pi-\alpha)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(\alpha+3\pi)}=\frac{-3\cos\alpha+\cos\alpha}{-\cos\alpha}=2.$$

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№509.*

Рассмотрим 3 варианта.

1) Цифра 3 стоит в разряде сотен. Тогда в каждом из оставшихся разрядов может стоять любая цифра кроме 3. То есть получается $9 \cdot 9 = 81$ число.

2) Цифра 3 стоит в разряде десятков. Так как число не может начинаться с нуля, то в разряде сотен может стоять любая цифра кроме 3 и 0, а в разряде единиц может стоять любая цифра кроме 3. То есть получается $9 \cdot 8 = 72$ числа.

3) Цифра 3 стоит в разряде единиц. Аналогично случаю 2 получаем $9 \cdot 8 = 72$ числа.

Итого $81 + 72 + 72 = 225$ чисел.

Ответ: 225.

П. 5.2.3. Тригонометрические функции двойного, тройного и половинного аргумента

Основные содержательные цели.

1) Построить формулы двойного, тройного и половинного угла и сформировать умение их применять.

2) Закрепить умение решать тригонометрические неравенства.

Для **самостоятельного вывода** двойного угла рекомендуется выполнить №510.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№512.

$$\frac{5\sin^2 77° - 5\sin^2 13°}{\cos 26°} = \frac{5\cos^2 13° - 5\sin^2 13°}{\cos 26°} = \frac{5\cos(2\cdot 13°)}{\cos 26°} = 5.$$

№513.

$\cos 3\alpha \cos^3\alpha + \sin 3\alpha \sin^3\alpha = (4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha)\cos^3\alpha + (3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha)\sin^3\alpha =$
$= 4\cos^6\alpha - 3\cos^4\alpha + 3\sin^4\alpha - 4\sin^6\alpha = 4(\cos^6\alpha - \sin^6\alpha) - 3(\cos^4\alpha - \sin^4\alpha) =$
$= 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \sin^4\alpha) - 3(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) =$
$= 4\cos 2\alpha((\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 - \sin^2\alpha\cos^2\alpha) - 3\cos 2\alpha\cdot 1 = \cos 2\alpha(4 - 4\sin^2\alpha\cos^2\alpha - 3) =$
$= \cos 2\alpha(1 - \sin^2\alpha) = \cos^3 2\alpha$

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№521.*

$$\left|\frac{\cos 2x+3}{\cos x}\right| = \left|\frac{2\cos^2 x-1+3}{\cos x}\right| = 2\left|\cos x+\frac{1}{\cos x}\right| \geqslant 2\cdot 2=4,$$ так как

$$\left|a+\frac{1}{a}\right| = |a|+\frac{1}{|a|} \geqslant 2\sqrt{|a|\cdot\frac{1}{|a|}} = 2.$$

П. 5.2.4. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму и суммы в произведение

Основные содержательные цели.

1) Построить формулы для преобразования произведения тригонометрических функций в сумму и суммы в произведение и сформировать умение их применять.

2) Закрепить умение решать тригонометрические неравенства.

Для **самостоятельного вывода** формул преобразования произведения тригонометрических функций в сумму рекомендуется выполнить №522 – №523.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта:

№525.

$\sin 4\alpha + \sin 6\alpha + \sin 8\alpha + \sin 10\alpha = (\sin 4\alpha + \sin 10\alpha) + (\sin 6\alpha + \sin 8\alpha) = 2\sin 7\alpha\cdot$
$\cdot\cos 3\alpha + 2\sin 7\alpha\cos\alpha = 2\sin 7\alpha(\cos 3\alpha + \cos\alpha) = 2\sin 7\alpha\cdot 2\cos 2\alpha\cos\alpha = 4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 7\alpha.$

Ответ: $4\cos\alpha\cos 2\alpha\sin 7\alpha$.

№526.

$$4\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right) = 4\sin\alpha\cdot\frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha - \cos\frac{2\pi}{3}\right) = 2\sin\alpha\left(\cos 2\alpha+\frac{1}{2}\right) =$$
$$= \sin\alpha(2\cos 2\alpha+1) = \sin\alpha\left(2(1-\sin^2\alpha)+1\right) = \sin\alpha(3-4\sin^2\alpha) = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha =$$
$$= \sin 3\alpha.$$

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№534.*

$$\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma-\sin(\alpha+\beta+\gamma)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\sin\left(-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\frac{2\gamma+\alpha+\beta}{2}=$$

$$=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{2\gamma+\alpha+\beta}{2}\right)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\gamma}{2}.$$

П. 5.2.5. Комбинированные преобразования выражений, содержащих тригонометрические функции

Основные содержательные цели.

1) Сформировать умение выполнять комбинированные преобразования выражений, содержащих тригонометрические функции.

2) Закрепить умение выполнять преобразование выражений, содержащих степени с рациональным показателем.

Для **самостоятельного открытия способов** выполнения комбинированных преобразований выражений, содержащих тригонометрические функции, рекомендуется выполнить №535 – №536.

Приведем **примеры решения и ответы к заданиям** из данного пункта.

№538.

$$\sqrt{3-2\cos2\alpha+2\sqrt{2-2\cos2\alpha}}=\sqrt{3-2\cos2\alpha+2\sqrt{2-2(1-2\sin^2\alpha)}}=$$

$$=\sqrt{3-2(1-2\sin^2\alpha)+2\sqrt{4\sin^2\alpha}}=\sqrt{1+4\sin^2\alpha+4|\sin\alpha|}=\sqrt{(1+2|\sin\alpha|)^2}=1+2|\sin\alpha|.$$

Ответ: $1+2|\sin\alpha|$.

№539.

$$\operatorname{tg}20°\operatorname{tg}40°\operatorname{tg}80°=\frac{\sin20°\sin40°\sin80°}{\cos20°\cos40°\cos80°}=\frac{\sin20°\frac{1}{2}(\cos40°-\cos120°)}{\cos20°\frac{1}{2}(\cos40°+\cos120°)}=$$

$$=\frac{\sin20°\left(1-2\sin^2 20°+\frac{1}{2}\right)}{\cos20°\left(2\cos^2 20°-1-\frac{1}{2}\right)}=\frac{\sin20°\left(\frac{3-4\sin^2 20°}{2}\right)}{\cos20°\left(\frac{4\cos^2 20°-3}{2}\right)}=$$

$$=\frac{3\sin20°-4\sin^3 20°}{4\cos^3 20°-3\cos20°}=\frac{\sin60°}{\cos60°}=\operatorname{tg}60°=\sqrt{3}.$$

Ответ: $\sqrt{3}$.

№540.

$$\sin20°\sin40°\sin60°\sin80°=\frac{1}{2}(\cos20°-\cos60°)\frac{1}{2}(\cos20°-\cos140°)=$$

$$=\frac{1}{4}(\cos^2 20°+\cos60°\cos140°-\cos60°\cos20°-\cos20°\cos140°)=$$

$$=\frac{1}{8}\left(\cos 40^\circ+1+\cos 200^\circ+\cos 80^\circ-\cos 80^\circ-\cos 40^\circ-\cos 120^\circ-\cos 160^\circ\right)=$$
$$=\frac{1}{8}\left(1+\cos 200^\circ-\cos 120^\circ-\cos 160^\circ\right)=\frac{1}{8}\left(1+\frac{1}{2}+\left(\cos 200^\circ-\cos 160^\circ\right)\right)=$$
$$=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{2}+0\right)=\frac{3}{16}.$$

Ответ: $\frac{3}{16}$.

№541.

$$\sin^8\alpha+\cos^8\alpha=\left(\sin^4\alpha+\cos^4\alpha\right)^2-2\sin^4\alpha\cos^4\alpha=$$
$$=\left(\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)^2-2\sin^2\alpha\cos^2\alpha\right)^2-\frac{\sin^4 2\alpha}{8}=\left(1-\frac{\sin^2 2\alpha}{2}\right)^2-\frac{\sin^4 2\alpha}{8}\geqslant$$
$$\geqslant\left(1-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{8}=\frac{1}{8}.$$

Из **раздела для повторения** учитель может выбрать любые задания, которые целесообразно повторить с конкретным классом, в зависимости от имеющихся у учащихся затруднений. При этом к процессу отбора заданий рекомендуется привлекать учащихся.

Рассмотрим решение **нестандартной задачи** данного пункта.

№549.*

$$f(x)=\frac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin x+\cos x}=\frac{2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}=\frac{2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}{2\cos\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)}=\operatorname{tg}\frac{x}{2},$$

а на интервале $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ функция $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ — нечетная.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Технология деятельностного метода

Принципиальное отличие ТДМ от традиционного демонстрационно-наглядного метода обучения заключается прежде всего в том, что в ТДМ представлено описание последовательности деятельностных шагов не учителя, а ученика. Выполняя эти шаги в образовательном процессе, ученик становится в позицию субъекта учебной деятельности, то есть «переоткрывает» для себя уже созданное в культуре, но для него самого — новое знание. Выполняемые учеником шаги вбирают в себя полный перечень личностных, регулятивных, познавательных и коммуникативных УУД ФГОС, составляющих основу умения учиться. А содержание и методики учебника помогают учителю организовать этот процесс в соответствии с технологическими и дидактическими требованиями ТДМ[1].

Столь радикальное изменение метода работы в практике школьного образования становится возможным, так как за последние десятилетия большинство учителей накопили значительное число приемов и способов активизации деятельности учащихся. Поэтому в образовательной системе «Школа 2000...» предложены несколько уровней реализации ТДМ:

1) *базовый уровень* — это переходный уровень, систематизирующий инновационный опыт российской школы активизации деятельности учащихся в процессе трансляции системы знаний;

2) *технологический уровень* — это уровень, когда учитель реализует технологические требования ТДМ, но пока еще работает в поисковом режиме;

3) *системно-технологический уровень* — это уровень, когда учитель включил ТДМ в систему своей работы и реализует технологические требования ТДМ во всей их полноте.

Базовый уровень ТДМ при введении нового знания включает в себя следующие шаги.

1) Организационный момент.
2) Актуализация знаний.
3) Проблемное объяснение нового знания.
4) Первичное закрепление во внешней речи.
5) Самостоятельная работа с самопроверкой.
6) Включение нового знания в систему знаний и повторение.
7) Итог урока.

На этапе *<u>организационного момента</u>* определяются цели урока и организуется с помощью мотивирующих приемов осознанное вхождение учащихся в пространство учебной деятельности на уроке.

Цель этапа *<u>актуализации знаний</u>* — подготовка мышления детей к изучению нового материала, воспроизведение учебного содержания, необходимого для восприятия нового, и указание ситуации, демонстрирующей недостаточность имеющихся знаний.

На этапе *<u>проблемного объяснения</u>* нового учитель обращает внимание учащихся на отличительное свойство задания, вызвавшего затруднение, раскрывает целесообразность введения нового знания, формулирует цель и тему урока и организует подводящий диалог, направленный на построение и осмысление нового способа действий. В завершение этапа новое знание фиксируется вербально, знаково и с помощью схем.

---

[1] В образовательной системе «Школа 2000...» учителю предложены варианты сценариев каждого урока курса математики «Учусь учиться» 0–9, то есть, начиная с дошкольной подготовки вплоть до выпуска из основной школы.

На этапе *первичного закрепления во внешней речи* изученное содержание закрепляется и проводится через внешнюю речь.

На этапе *самостоятельной работы с самопроверкой* организуется самоконтроль усвоения нового учебного содержания, при этом новый способ действия переводится во внутренний план.

Цель этапа *включения нового знания в систему знаний и повторения* – определение границ применимости нового знания, тренировка навыков его использования совместно с ранее изученным материалом и повторение содержания, которое закрепляет изученное на предыдущих уроках и потребуется на следующих уроках.

На этапе *подведения итогов урока* фиксируется изученное на уроке новое знание, уточняется его значимость, организуется самооценка учебной деятельности и намечаются дальнейшие цели деятельности.

Структура урока базового уровня ТДМ выделяет из общей структуры рефлексивной самоорганизации ту ее базовую часть, которая представляет собой целостный элемент, обеспечивающий сознательное, глубокое и прочное усвоение учащимися накопленного в культуре опыта и развитие познавательных процессов. Не вступая в противоречие с целостной структурой деятельностного метода обучения, базовый уровень ТДМ позволяет учителю осваивать деятельностный метод в спокойном, комфортном для себя темпе по индивидуальной траектории саморазвития.

На **технологическом уровне** при введении нового знания учитель начинает переходить к использованию следующей структуры урока.

1. *Мотивация (самоопределение) к учебной деятельности.*

Данный этап урока предполагает осознанный переход ученика из жизнедеятельности в пространство учения. С этой целью организуется его мотивирование к учебной деятельности на уроке («буду учиться») через механизм «надо» – «могу» – «хочу», а именно:

1) актуализируются требования к ученику со стороны учебной деятельности (понимание нормы учебной деятельности – «надо»);

2) устанавливаются тематические рамки (мне понятно – «могу»);

3) создаются условия для возникновения у него *внутренней потребности* включения в учебную деятельность (принятие нормы на личностном уровне – «хочу»).

В развитом варианте здесь происходят процессы адекватного самоопределения в учебной деятельности, предполагающие сопоставление учеником своего реального «Я» с образом «Я – идеальный ученик», затем осознанным подчинением себя системе нормативных требований учебной деятельности и выработкой внутренней готовности к их реализации (субъектный и личностный уровни).

2. *Актуализация и фиксирование индивидуального затруднения в пробном действии.*

На данном этапе организуется подготовка и мотивация учащихся к надлежащему самостоятельному выполнению пробного учебного действия, его осуществлению и фиксации индивидуального затруднения.

Соответственно, данный этап предполагает:

1) актуализацию изученных способов действий, достаточных для построения нового знания, их обобщение и знаковую фиксацию;

2) актуализацию соответствующих мыслительных операций и познавательных процессов;

3) мотивирование учащихся к пробному учебному действию («надо» – «могу» – «хочу»), и его самостоятельное осуществление;

4) фиксация учащимися индивидуальных затруднений в выполнении ими пробного учебного действия или его обосновании (в форме «я не знаю ...»).

Завершение этапа связано с организацией выхода учащихся в рефлексию пробного действия.

3. *Выявление места и причины затруднения.*

На данном этапе учащиеся выявляют место и причину затруднения. С этой целью они должны:

1) уточнить, какую именно конкретную задачу они не смогли решить или обосновать решение (то есть *место* затруднения);

2) выявить и зафиксировать во внешней речи, какого способа действия им не хватает, чтобы решить и обосновать исходную задачу и задачи такого класса или типа вообще (то есть *причину* затруднения).

4. *Построение проекта выхода из затруднения (цель, тема, план, способ, средство).*

На данном этапе учащиеся в коммуникативной форме обдумывают *проект* будущих учебных действий:

- ставят *цель* (целью всегда является устранение зафиксированного затруднения),
- согласовывают *тему* урока,
- строят *план* достижения цели,
- выбирают *способ* (дополнение или уточнение),
- определяют *средства* (алгоритмы, модели, учебник и т.д.)

Этим процессом руководит учитель: на первых порах с помощью подводящего диалога, затем – побуждающего, а затем и посредством организации самостоятельной учебной деятельности учащихся.

5. *Реализация построенного проекта.*

На данном этапе осуществляется реализация построенного проекта: обсуждаются различные варианты, предложенные учащимися, и выбирается оптимальный вариант, который фиксируется в языке вербально и знаково.

Построенный способ действий используется для решения исходной задачи, вызвавшей затруднение.

В завершение, уточняется общий характер нового знания и фиксируется преодоление возникшего ранее затруднения.

6. *Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи.*

На данном этапе учащиеся в форме коммуникативного взаимодействия (фронтально, в группах, в парах) решают типовые задания на новый способ действий с проговариванием алгоритма решения вслух.

7. *Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону.*

При проведении данного этапа используется индивидуальная форма работы: учащиеся самостоятельно выполняют задания нового типа и осуществляют их самопроверку, пошагово сравнивая с эталоном. В завершение организуется исполнительская рефлексия хода реализации построенного проекта учебных действий и контрольных процедур.

Эмоциональная направленность этапа состоит в акцентировании учеников на успех: организации, по возможности, для каждого ученика ситуации успеха, мотивирующей его к включению в дальнейшую познавательную деятельность. «Всели в ученика, – говорил В.А. Сухомлинский, – веру в себя, в успех. Моральные силы для преодоления своих слабых сторон ребенок черпает в своих успехах».

8. *Включение в систему знаний и повторение.*

На данном этапе выявляются границы применимости нового знания и выполняются задания, в которых новый способ действий предусматривается как промежуточный шаг.

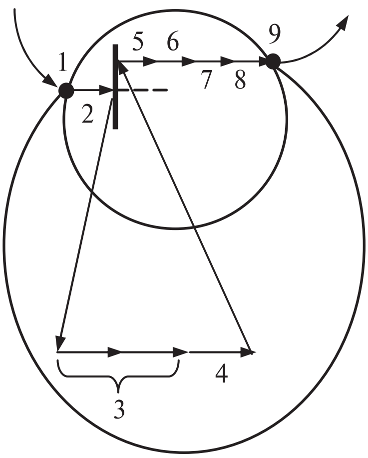
Организуя этот этап, учитель подбирает задания, в которых тренируется использование изученного ранее материала, имеющего методическую ценность для введения в последующем новых способов действий. Таким образом, происходит, с одной стороны, тренировка в применении изученного способа действия, а с другой – подготовка к введению в будущем нового знания.

9. *Рефлексия учебной деятельности на уроке (итог урока).*

На данном этапе фиксируется новое содержание, изученное на уроке, и организуется рефлексия и самооценка учениками собственной учебной деятельности. В завершение, соотносятся ее цель и результаты, фиксируется степень их соответствия и намечаются дальнейшие цели деятельности.

Данная структура урока графически может быть изображена с помощью схемы (рис. 1), помогающей учителю соотнести между собой этапы учебной деятельности. Эта схема является, по сути, опорным сигналом, который в адаптированном виде представляет методологическую схему, описывающую структуру учебной деятельности [3] с включенными в нее шагами, обеспечивающими глубокое и прочное усвоение знаний.

Технология деятельностного метода «Школа 2000...» (ТДМ)



1) Мотивация (самоопределение) к учебной деятельности.
2) Актуализация и фиксирование индивидуального затруднения в пробном действии.
3) Выявление места и причины затруднения.
4) Построение проекта выхода из затруднения.
5) Реализация построенного проекта.
6) Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи.
7) Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону.
8) Включение в систему знаний и повторение.
9) Рефлексия учебной деятельности.

Рис. 1

Предложенная технология носит интегративный характер: в ней синтезированы не конфликтующие между собой идеи из концепций развивающего образования ведущих российских педагогов и психологов с позиций преемственности с традиционной школой.

Действительно, при реализации шагов 1, 2, 5–9 выполняются требования традиционной школы к организации передачи учащимся знаний, умений и навыков; шаги 2–8 обеспечивают системное прохождение учащимися всех этапов, выделенных П.Я. Гальпериным как необходимые для глубокого и прочного усвоения знаний; завершение 2-го шага связано с созданием затруднения в деятельности («коллизии»), что является, по мнению Л.В. Занкова, необходимым условием развивающего обучения. На этапах 2–5, 7, 9 обеспечиваются требования к организации учебной деятельности, разработанные В.В. Давыдовым. Таким образом, на основе методологической версии теории деятельности (Г.П. Щедровицкий, О.С. Анисимов и др.) удалось построить последовательность деятельностных шагов, которая может использоваться в современной сфере образования в качестве синтезирующего предиката.

Как уже отмечалось, прохождение данных этапов ТДМ позволяет учащимся на каждом уроке тренировать весь комплекс УУД ФГОС, составляющих основу умения учиться. Их примеры по этапам ТДМ приведены в следующей таблице[2].

---

[2] *Условные обозначения*:

Л – личностные УУД; *Р* – регулятивные УУД; *П* – познавательные УУД; *К* – коммуникативные УУД.

	Этапы урока в ТДМ	Тренируемые УУД
1	***Мотивация (самоопределение) к учебной деятельности***	– познавательная мотивация / самоопределение (*Л*); — смыслообразование (*Л*); — целеполагание (*Р*); — планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками (*К*)
2	***Актуализация и фиксирование индивидуального затруднения в пробном действии***	– анализ, синтез, сравнение, обобщение, аналогия, классификация (*П*); — извлечение необходимой информации из текстов (*П*); — использование знаково-символических средств (*П*); — осознанное построение речевого высказывания (*П*); — подведение под понятие (*П*); — выполнение пробного учебного действия (*Р*); — фиксирование затруднения в пробном действии (*Р*); — волевая саморегуляция в ситуации затруднения (*Р*); — выражение своих мыслей с достаточной полнотой и точностью (*К*); — аргументация своего мнения и позиции в коммуникации (*К*); — учет разных мнений (*К*); — использование критериев для обоснования своего суждения (К)
3	***Выявление места и причины затруднения***	– анализ, синтез, сравнение, обобщение, аналогия, классификация (*П*); — подведение под понятие (*П*); — определение основной и второстепенной информации (*П*); — осознанное построение речевого высказывания (*П*); — структурирование знаний (*П*); — постановка и формулирование проблемы (*Р*); — волевая саморегуляция в ситуации затруднения (*Р*); — выражение своих мыслей с достаточной полнотой и точностью (*К*); — аргументация своего мнения и позиции в коммуникации (*К*); — учет разных мнений, координирование в сотрудничестве разных позиций (*К*); — разрешение конфликтов (*К*)
4	***Построение проекта выхода из затруднения***	– самоопределение (*Л*); — смыслообразование (*Л*); — анализ, синтез, сравнение, обобщение, аналогия (*П*); — самостоятельное выделение и формулирование познавательной цели (*Р*); — поиск и выделение необходимой информации (*П*); — выбор наиболее эффективных способов решения задач (*П*); — планирование, прогнозирование (*Р*); — структурирование знаний (*П*); — осознанное построение речевого высказывания (*П*); — волевая саморегуляция в ситуации затруднения (*Р*); — выражение своих мыслей с достаточной полнотой и точностью (*К*); — аргументация своего мнения и позиции в коммуникации (*К*); — учет разных мнений (*К*); — использование критериев для обоснования своего суждения (*К*). — планирование учебного сотрудничества с учителем и сверстниками (*К*); — разрешение конфликтов (*К*)
5	***Реализация построенного проекта***	– смыслообразование (*Л*); — анализ, синтез, сравнение, обобщение, аналогия, классификация (*П*); — волевая саморегуляция (*Р*); — познавательная инициатива (*Р*); — выдвижение гипотез и их обоснование (*Р*); — самостоятельное создание способов решения проблем творческого и поискового характера на основе метода рефлексивной самоорганизации (*Р*); — поиск необходимой информации (*П*);

		— использование знаково-символических средств (*П*); — моделирование и преобразование моделей разных типов (предметы, схемы, знаки и т.д.) (*П*); — установление причинно-следственных связей (*П*); — осознанное построение речевого высказывания (*П*); — построение логической цепи рассуждений (*П*); — доказательство (*П*); — нравственно-этическое оценивание усваиваемого содержания (*Л*); — осознание ответственности за общее дело (*Л*); — следование в поведении моральным нормам и этическим требованиям (*Л*); — выражение своих мыслей с достаточной полнотой и точностью (*К*); — адекватное использование речевых средств для решения коммуникационных задач (*К*); — формулирование и аргументация своего мнения и позиции в коммуникации (*К*); — учет разных мнений, координирование в сотрудничестве разных позиций (*К*); — использование критериев для обоснования своего суждения (*К*); — достижение договоренностей и согласование общего решения (*К*); — разрешение конфликтов (*К*)
6	***Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи***	– анализ, синтез, сравнение, обобщение, аналогия, классификация (*П*); — извлечение из математических текстов необходимой информации (*П*); — моделирование и преобразование моделей разных типов (*П*); — использование знаково-символических средств (*П*); — подведение под понятие (*П*); — установление причинно-следственных связей (*П*); — выполнение действий по алгоритму (*П*); — осознанное построение речевого высказывания (*П*); — построение логической цепи рассуждений (*П*); — доказательство (*П*); — выражение своих мыслей с достаточной полнотой и точностью (*К*); — адекватное использование речевых средств для решения коммуникационных задач (*К*); — формулирование и аргументация своего мнения в коммуникации (*К*); — учет разных мнений, координирование в сотрудничестве разных позиций (*К*); — использование критериев для обоснования своего суждения (*К*); — достижение договоренностей и согласование общего решения (*К*); — осознание ответственности за общее дело (*Л*); — следование в поведении моральным нормам и этическим требованиям (*Л*)
7	***Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону***	– анализ, синтез, сравнение, обобщение, аналогия, классификация (*П*); — извлечение из математических текстов необходимой информации (*П*); — использование знаково-символических средств (*П*); — подведение под понятие (*П*); — выполнение действий по алгоритму (*П*); — осознанное построение речевого высказывания (*П*); — доказательство (*П*); — контроль (*Р*); — коррекция (*Р*); — оценка (*Р*); — волевая саморегуляция в ситуации затруднения (*Р*); — осознанное построение речевого высказывания (*П*);

		— выражение своих мыслей с достаточной полнотой и точностью (*К*); — использование критериев для обоснования своего суждения (К)
8	***Включение в систему знаний и повторение***	– нравственно-этическое оценивание усваиваемого содержания (*Л*); — анализ, синтез, сравнение, обобщение, аналогия, классификация (*П*); — понимание текстов, извлечение необходимой информации (*П*); — подведение под понятие (*П*); — моделирование, преобразование модели (*П*); — использование знаково-символических средств (*П*); — установление причинно-следственных связей (*П*); — выведение следствий (*П*); — самостоятельное создание алгоритмов деятельности (*П*); — выполнение действий по алгоритму (*П*); — построение логической цепи рассуждений (П); — доказательство (*П*); — осознанное построение речевого высказывания (*П*); — контроль, коррекция, оценка (*Р*); — выражение своих мыслей с достаточной полнотой и точностью (*К*); — формулирование и аргументация своего мнения в коммуникации (*К*); — учет разных мнений, координирование в сотрудничестве разных позиций (*К*); — использование критериев для обоснования своего суждения (*К*). — достижение договоренностей и согласование общего решения (*К*); — постановка вопросов (*К*); — адекватное использование речевых средств для решения коммуникационных задач (*К*); — управление поведением партнера (*К*) — осознание ответственности за общее дело (*Л*); — следование в поведении моральным и этическим нормам (*Л*)
9	***Рефлексия учебной деятельности***	– рефлексия способов и условий действия (*Р*); — контроль и оценка процесса и результатов деятельности (*Р*); — самооценка на основе критерия успешности (*Л*); — адекватное понимание причин успеха / неуспеха в учебной деятельности (*Л*); — выражение своих мыслей с достаточной полнотой и точностью (*К*); — формулирование и аргументация своего мнения, учет разных мнений (*К*); — использование критериев для обоснования своего суждения (*К*); — планирование учебного сотрудничества (*К*); — следование в поведении моральным нормам и этическим требованиям (*Л*)

Приведенная структура урока в ТДМ, сохраняя общие закономерности включения в учебную деятельность, видоизменяется в зависимости от возрастного этапа обучения и типа урока.

Типология уроков

В дидактической системе деятельностного метода «Школа 2000...» в соответствии с общим принципом формирования системы знаний выделяются 4 типа уроков:

• уроки *открытия нового знания*, где учащиеся под руководством учителя учатся самостоятельно строить новые способы действий и приобретают первичное умение применять новое знание;

• уроки *рефлексии*, которые ориентированы на формирование умения: 1) применять полученные знания, в том числе и в нестандартных условиях (*рефлексивно-тренировочные*); 2) самостоятельно выявлять и исправлять свои ошибки, корректировать свою учебную деятельность (*рефлексивно-коррекционные*);

• уроки *обучающего контроля*, на которых учащиеся учатся контролировать результаты своей учебной деятельности;

• уроки *систематизации знаний*, в ходе которых учащиеся систематизируют и структурируют знания по курсу математики.

Все уроки строятся на основе метода рефлексивной самоорганизации, поэтому в их процессе также используется весь комплекс универсальных учебных действий, но на каждом из этих уроков делаются разные акценты. Так, если на уроках открытия нового знания основное внимание уделяется проектированию новых способов действий в проблемных ситуациях, то на уроках рефлексии – формированию умения их применять, корректировать свои действия и самостоятельно создавать новые алгоритмы деятельности в задачных ситуациях (решение нестандартных задач). На уроках обучающего контроля отрабатываются действия контроля, коррекции и оценки, а на уроках систематизации знаний формируется способность к структурированию знаний.

Технология деятельностного метода Л.Г. Петерсон уточняется в соответствии с возрастной периодизацией учащихся и типами уроков.

Опишем алгоритмы проектирования уроков всех типов в ТДМ и краткие методические рекомендации к их проведению.

Проектирование и проведение уроков в ТДМ

Рассмотрим особенности организации деятельности учащихся 7–9 классов на уроках в ТДМ разной целевой направленности – а именно, те конкретные шаги, которые должен продумать учитель при проектировании этих уроков.

В скобках указано примерная продолжительность каждого этапа. Вместе с тем, в зависимости от конкретной ситуации и дидактических целей учителя, их продолжительность может быть разная. Однако указанное время дает представление о среднем значении продолжительности этапа, которое поможет полноценно реализовать все задачи урока без задержки учащихся после звонка, что всегда нежелательно и непродуктивно.

1. Урок открытия нового знания (ОНЗ)

1-й этап. ***Мотивация к учебной деятельности (1–2 мин)***

Основной целью этапа является включение учащихся в учебную деятельность на личностно значимом уровне.

Для реализации этой цели необходимо следующее.

1) Организовать определение типа урока.

Определение типа урока создает для учащихся ориентировочную основу действия. Ученики предлагают версии, опираясь на свой опыт. Учитель уточняет тип урока, исходя из логики развития содержания и результатов предыдущих уроков. Например, после успешно проведенной текущей контрольной работы естественно ожидать урок ОНЗ.

2) Организовать актуализацию способа работы учащихся на уроках ОНЗ, принятого в классе («надо»).

Поскольку к 7 классу структура учебной деятельности должна быть в основном усвоена учащимися, они должны знать все шаги урока ОНЗ:

✓ вспоминаем эталоны, которые нам понадобятся для следующего шага;
✓ выполняем пробное действие;
✓ выясняем, что мы пока не знаем;
✓ ставим цель и проектируем, как ее достичь;
✓ выполняем проект, формулируем новое свойство, правило, алгоритм;
✓ тренируемся в его применении;
✓ пишем и проверяем самостоятельную работу;

- ✓ решаем задачи на повторение;
- ✓ подводим итог.

Это не значит, что все эти шаги каждый раз надо проговаривать полностью. После того как они отработаны, может быть, достаточно одного вопроса учителя:

– Все помнят, как мы работаем?

Или, возможно, уточняется этап, который в данный период отрабатывается в классе.

– Над каким этапом урока ОНЗ мы сейчас работаем? (Мы учимся ставить проблему – правильно устанавливать, что мы пока не знаем.)

Другими словами, исходя из уровня формирования у учащихся регулятивных УУД, учитель планирует организацию следующего шага учащихся в освоении структуры учебной деятельности и ее сознательного применения на уроке.

3) Организовать фиксацию учащимися тематических рамок урока («могу»).

Тематические рамки урока фиксируются с максимально возможным подключением учащихся так, чтобы им была понятна логика развития содержания. Например:

– Какую тему мы изучаем? (Квадратные уравнения.)

– Мы узнаем сегодня новый прием, который позволит нам решать некоторые квадратные уравнения быстрее.

4) Создать условия для возникновения у учеников внутренней потребности включения в учебную деятельность («хочу»).

Личностное позитивное отношение к учению не формируется в течение нескольких минут урока, а определяется созданной в классе образовательной средой. Это творческая доброжелательная среда, где ученику интересно, где он имеет опыт успеха, где он ощущает моральную поддержку учителя и сверстников, заинтересованность в его успехе. Как писал Б.А. Слуцкий,

Ничему меня не научит,
То, что тычет, талдычит, жучит...

Вместе с тем, на каждом уроке важно поддерживать, а не разрушать эту среду – улыбкой, неожиданным замечанием или заранее продуманным приемом, который заставит детей приятно удивиться, улыбнуться, почувствовать доброту и поддержку. При этом особое внимание и, возможно, предварительное планирование приемов работы должно быть обращено к менее успешным детям.

Очень важно осознать значимость этого этапа – без положительной мотивации ученик будет постоянно «выпадать» из урока, – и профессионализм учителя заключается в том, чтобы механизм «надо» – «могу» – «хочу» помог ему включить в учебную деятельность каждого учащегося.

В отличие от первого этапа урока ОНЗ в 5–6 классах, на данном этапе определяется тип урока. Учащиеся, зная к 7 классу структуру урока каждого типа, понимают цель и требования к каждому этапу, что обеспечивает для них создание ориентировочной основы действий.

На этой базе в дальнейшем можно организовать процессы адекватного самоопределения учащихся в учебной деятельности. Механизмы организации этой работы описаны в пособии, которое так и называется: «Мотивация и самоопределение в учебной деятельности» [4]. Заметим, что самоопределение исключительно важно не только для успешной работы учащихся на конкретном уроке, но и с позиций общей цели формирования способностей к самоопределению, что является приоритетной задачей образования на этапе обучения в 7–9 классах средней школы.

Этап можно завершить вопросом:

– Готовы к работе?

Оптимальным результатом данного этапа является положительная мотивация (в развитом варианте – самоопределение на субъектном или личностном уровнях) каждого учащегося к учебной деятельности на уроке.

2-й этап. ***Актуализация и фиксирование индивидуального затруднения в пробном действии (5–7 мин).***

Основной целью этапа является подготовка мышления учащихся к построению нового способа действий и осознание их потребности в этом построении.

Для реализации этой цели необходимо следующее.

1) Организовать актуализацию мыслительных операций, достаточных для построения нового знания (анализ, сравнение, обобщение, аналогия, классификация и др.)

С этой целью можно использовать задания на поиск закономерностей (на 1–2 минуты), в которых одновременно проводится тренинг устных вычислений и преобразований («математическая разминка»).

2) Организовать повторение способов действий, достаточных для построения нового знания, проговорить эти способы вслух и зафиксировать в форме эталонов.

Важно не перегружать данный этап заданиями на «доработку» изученного ранее материала. Эта распространенная методическая ошибка порождает «порочный круг»: затягивание этапа актуализации ведет к тому, что на уроке часть этапов, необходимых для полноценного усвоения нового знания, остается не пройдена – не достаточно времени. Поэтому в дальнейшем и этот материал приходится тоже «дорабатывать», что не позволит качественно изучить следующие темы и т.д.

Поэтому для актуализации желательно отбирать, в основном, то, что необходимо для построения нового знания. Например, при изучении теоремы Виета и обратной к ней, нужно повторить понятие корня уравнения, формулы корней квадратного уравнения и правила действий и преобразований многочленов.

Сэкономить время на данном этапе поможет правильный подбор домашнего задания накануне урока – оно должно содержать все способы действий, необходимые для построения нового свойства, алгоритма, правила и т.д.

3) Организовать анализ и выполнение учащимися задания на пробное действие.

Задание на пробное действие – это задание, содержащее новый для учащихся способ действий, который им, собственно, и предстоит открыть для себя на данном уроке. Учащиеся должны понимать, что пробное действие предлагается с двумя целями:

- ✓ для того чтобы глубже осознать и сформулировать проблему;
- ✓ для того чтобы эти «пробы» помогли определить способ решения проблемы.

Например, при изучении теоремы Виета и обратной к ней это может быть следующее задание.

– Решите уравнение $x^2 - 9\frac{5}{9}x + 5 = 0$ устно за 1 минуту, не используя формулы корней.

Новизна задания, очевидно, в том, что корни уравнения требуется найти, не используя формулы корней.

4) Организовать фиксирование учащимися индивидуального затруднения в учебной деятельности.

Поскольку способ действий не известен, то, естественно, возникают разные версии ответов, а кто-то не сможет получить никакой ответ. Учитель организует фиксирование учащимися своего индивидуального затруднения, которых, по сути, два типа:

- ✓ «Я не знаю, как правильно решить эту конкретную задачу»
- ✓ «Я не знаю, как обосновать свое решение»

Для организации фиксирования учащимися своего затруднения можно использовать различные приемы. Например, через 1 минуту после начала его выполнения спросить у учащихся полученные ответы и записать на доске все имеющиеся версии, затем выставить правильный ответ и спросить:

– Поднимите руки, кто не смог получить правильный ответ.

– В чем ваше затруднение? Что вы не знаете?

При изучении, например, теоремы Виета и обратной к ней учащиеся в этом случае фиксируют свое затруднение так: «Я не знаю как найти корни квадратного уравнения $x^2 - 9\frac{5}{9}x + 5 = 0$, не используя формул корней».

Если кто-то из учеников все-таки укажет корни 9 и $\frac{5}{9}$, что без знания теоремы Виета крайне маловероятно, учащихся можно спросить:

– У кого получились правильные ответы – обоснуйте правильность своего решения.

Начиная с 1 класса, учащиеся знают, что для доказательства надо применить *согласованный* эталон. Поскольку теорема Виета не изучалась, то они фиксируют свое затруднение так: «Я не знаю, как обосновать свое решение».

Подчеркнем еще раз: задача повторения пройденного материала является здесь второстепенной. Поэтому организовать 2-й этап урока в ТДМ надо так, чтобы он заканчивался примерно на 10-й минуте.

На этом этапе может использоваться как фронтальная, так и групповая форма работы.

3-й этап. ***Выявление места и причины затруднения (2–3 мин).***

Основной целью данного этапа является формулировка проблемы, то есть причины затруднения.

Для реализации этой цели на уроке открытия нового знания необходимо:

1) Организовать актуализацию содержания задачи на пробное действие.

– Какую задачу вам надо было решить?

Учащиеся повторяют формулировку задачи на пробное действие.

2) Организовать выявление и фиксацию во внешней речи общего способа решения задач на пробное действие.

– Какой способ (алгоритм) нужно знать для ее решения?

Учащиеся дают обобщенную формулировку способа решения задачи на пробное действие. В рассмотренном выше примере

– для решения этой задачи нужно знать, как найти корни квадратного уравнения без использования формул корней.

3) Организовать фиксацию во внешней речи причины затруднения – тех конкретных знаний и умений, которых недостает для решения задачи на пробное действие и задач такого типа вообще.

Формулировка причины затруднения в учебной деятельности на уроке открытия нового знания всегда начинается словами «Я не знаю...» с указанием выявленного на предыдущем шаге способа действий. В нашем случае:

– Я не знаю, как найти корни квадратного уравнения без использования формул корней.

Если у этого способа есть название, учитель может сообщить его учащимся:

– Подобные задачи позволяет решать теорема Виета и обратная к ней.

На этом этапе используется фронтальная форма работы.

Определение причины своего затруднения – принципиально важный шаг вхождения учащихся в учебную деятельность. Однако заметим, что иногда сформулировать общий способ решения задачи на пробное действие они могут по одному только ее виду, без решения и подводящих вопросов. Если в 7–9 классах проблема и способ ее разрешения очевидны для учащихся и опыт постановки проблемы у них достаточный, то этапы 2 и 3 можно провести в «свернутом виде»: от задания на пробное действие перейти сразу к формулировке проблемы.

4-й этап. ***Построение проекта выхода из затруднения (3—4 мин).***

Основной целью данного этапа является постановка цели, определение темы урока, способа, средств и плана выхода из затруднения.

Для реализации этой цели на уроке открытия нового знания необходимо сделать следующее.

1) Организовать постановку цели учебной деятельности.

Цель учебной деятельности всегда заключается в устранении причины затруднения, поэтому она непосредственно выводится из формулировки причины затруднения.

Учебная цель включает в себя получение ***знания***, которого недостает для решения исходной задачи, и выработку ***умения*** его применять.

В примере, рассмотренном выше, цель учебной деятельности можно сформулировать так: узнать теорему Виета и обратную к ней и научиться их применять.

2) Организовать согласование темы учебной деятельности.

Тема учебной деятельности обычно выводится из цели. В нашем случае: «Теорема Виета и обратная к ней».

Постановка цели и определение темы учебной деятельности — *ключевые шаги* учебной деятельности, так как личностное отношение ученика к цели учебной деятельности определяет степень его включенности в эту деятельность, а значит, и ее результат. Тем не менее, благодаря подготовительной работе, проведенной на предыдущих этапах урока, оба этих шага занимают не более минуты.

3) Организовать определение способа, средств и плана выхода из затруднения.

На данном этапе урока учащиеся под руководством учителя определяют способ, средства и план (последовательность шагов, которые необходимо сделать для реализации поставленной цели). то есть фактически строят проект выхода из затруднения.

Для успешного решения задач данного этапа, необходимо тщательно продумывать организацию деятельности учащихся. Способ организации, уровень самостоятельности учащихся зависит от конкретной ситуации в классе — опыта детей и опыта работы учителя в ТДМ, уровня их подготовки.

Если класс только начинает работать в ТДМ, то учитель может просто предложить выбрать учащимся способ и средства проектирования из готовых вариантов, составленных предварительно им самим, а при определении плана — попросить их составить правильную последовательность из подготовленных им, но «перепутанных» шагов. Тогда работа на данном этапе строится фронтально, учитель занимает активную позицию организатора коммуникации, используя подводящий и побуждающий диалоги.

Если же у учащихся накоплен достаточный опыт планирования, то целесообразно организовать работу учащихся в группах в течение 2 минут, а затем сравнить и согласовать их варианты.

К 7 классу у учащихся сформирована способность к коммуникации в позициях автора, понимающего и критика, поэтому в групповой работе на данном этапе обучения формируется способность к коммуникации в позиции организатора. Для успешного решения задачи в группе каждый учащийся пробует себя в разных коммуникативных позициях, что дает ему возможность определить свои способности. Естественно, что групповая форма работы наиболее эффективна и интересна для учащихся.

Результатом данного этапа является принятый учащимися согласованный алгоритм их действий по реализации на следующих этапах поставленной цели — получение конкретного ***знания*** и выработка ***умения*** его применять.

5-й этап. ***Реализация построенного проекта (6—8 мин).***

Основной целью данного этапа является построение нового знания, фиксирование в знаках и речи и указание области его применимости.

Для реализации этой цели на уроке открытия нового знания необходимо:

1) Организовать построение нового способа действий.

На данном шаге обычно используется подготовленная учителем система заданий, которую последовательно выполняют учащиеся для того, чтобы прийти к самостоятельному выводу. В рассмотренном выше примере они должны установить, что сумма корней квадратного уравнения противоположна *b*, а произведение – равно *c*.

2) Организовать фиксацию полученного вывода в речи и в знаковой форме.

В рассмотренном примере на данном шаге учащиеся уточняют формулировку теоремы Виета, строят обратное утверждение и фиксируют новое знание в форме эталона.

Эталоны необходимы не только для лучшего усвоения знаний, но и для организации самопроверки: на данном уроке – на этапе самостоятельной работы, а в последующем – на уроках рефлексии, развивающего контроля, для повторения.

3) Организовать решение исходной задачи и фиксацию преодоления затруднения.

В нашем случае учащиеся обращаются к исходному уравнению $x^2 - 9\frac{5}{9}x + 5 = 0$. Анализируя коэффициенты *b* и *c* данного уравнения, они должны догадаться, что его корнями являются числа 9 и $\frac{5}{9}$. Свой результат они обосновывают с помощью теоремы, обратной теореме Виета.

4) Организовать уточнение общего характера нового знания и определение области его применимости.

В нашем примере учащиеся на данном шаге фиксируют, что теорема Виета применима для любого квадратного уравнения, а подбор корней по коэффициентам целесообразно использовать только в случае «удобных» коэффициентов.

Грамотная организация коммуникативного взаимодействия позволяет существенно экономить время проведения данного этапа. На первом его шаге предпочтительна групповая форма работы, а на последующих – фронтальная.

Результатом данного этапа является фиксация каждой группой решения поставленной учебной задачи в части построения нового ***знания***.

6-й этап. ***Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи (5–6 мин).***

Основной целью этапа является усвоение учащимися нового знания и формирование ***умения*** его применять.

Законы эффективного усвоения знаний описаны в теории поэтапного формирования умственных действий П.Я. Гальперина. На предыдущих пяти этапах было организовано прохождение четырех первых этапов усвоения:

– мотивация – на 1-м этапе;

– создание ориентировочной основы действий – также на 1-м этапе;

– материальное и материализованное действие – на 2–5 этапах;

– фиксация нового знания в знаках и речи – на 5-м этапе.

Здесь учащиеся проходят следующий этап усвоения знаний – тренинг в применении с проведением через *внешнюю* (*громкую*) речь. Они решают типовые задания на новый способ действия с проговариванием вслух определения, алгоритма, свойства и т.д.

Сначала работа организуется либо фронтально (например, «цепочкой» с неожиданным переходом по знаку учителя, что активизирует внимание учащихся), либо в группах. В завершение этапа обязательна работа в парах для того, чтобы проговорить новый алгоритм смог каждый учащийся, при этом второй ученик, слушая и проверяя соседа по парте, проговаривает алгоритм про себя (*внутренняя* речь).

7-й этап. ***Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону (8–10 мин).***

Основной целью этапа является интериоризация нового знания, индивидуальная рефлексия достижения цели и создание ситуации успеха.

Для реализации этой цели на уроке открытия нового знания необходимо:

1) Организовать самостоятельное выполнение учащимися заданий на новый способ действий.

Учащимся предлагается 2–3 типовых задания на новое знание, при выполнении которых они могут использовать построенные эталоны. Они выполняют их самостоятельно и, таким образом, они проводят новое знание через *внутреннюю* речь (проговаривают *про себя*).

2) Организовать самопроверку учащимися своих решений по эталону.

При проверке своего решения по эталону все учащиеся еще раз «проговаривают» про себя каждый шаг нового способа действий.

3) Организовать индивидуальная рефлексию учащимися достижения цели своей учебной деятельности.

При самопроверке своего решения каждый ученик получает возможность определить, при необходимости, место и причину своей ошибки и исправить ее, опираясь на эталон.

Если такая работа не проводилась на предыдущих ступенях обучения, то на первых порах к эталону добавляется образец правильного решения. А если эта работа системно проводилась, то к 7 классу способность к самопроверке по эталону у учащихся уже полностью сформирована.

4) Создать ситуацию успеха для каждого ученика.

На данном этапе учитель вначале просит поднять руку тех, кто допустил ошибки, и просит объяснить их причины. Если есть ученики, которые с самопроверкой не справились, просит помочь им тех, кто справился.

– Молодцы, разобрались в своих ошибках!

Затем руки поднимают те, кто не сделал ошибок:

– Молодцы!

Переживание учащимся ситуации успеха при правильном решении заданий или осознание причины своих ошибок и их осознанное исправление способствуют формированию у них положительного самоопределения к учебной деятельности.

8-й этап. ***Включение в систему знаний и повторение (5–15 мин).***

Основной целью этапа является включение нового способа действий в систему знаний, повторение и закрепление ранее изученного и, вместе с тем, опережающая подготовка к изучению следующих тем.

Для реализации этой цели на уроке открытия нового знания необходимо:

1) организовать решение учащимися зданий, в которых новое знание связывается с материалом, изученным ранее;

2) организовать решение учащимися зданий, требующих системной тренировки, и заданий на подготовку к изучению следующих тем.

Этот этап проводится в форме коммуникативного взаимодействия преимущественно в группах или в парах.

В учебниках курса «Учусь учиться» предоставляется возможность выбора учащимися заданий на повторение, творческих заданий, организации во внеклассной работе проектной и исследовательской деятельностей.

9-й этап. ***Рефлексия учебной деятельности на уроке (2–3 мин).***

Основной целью этапа является проведение учащимися рефлексии своей учебной деятельности на уроке, самооценка и фиксация домашнего задания.

Для реализации поставленной цели необходимо:

1) Организовать рефлексию деятельности на уроке класса в целом, группы, каждого учащегося.

При организации рефлексии деятельности разбираются вопросы:

- ✓ где и почему возникло затруднение (в работе класса, группы, собственной работе);
- ✓ каким способом преодолено возникшее затруднение;
- ✓ какой новый способ действия был построен;
- ✓ какова область его применения;
- ✓ достигнута ли цель урока;
- ✓ что необходимо сделать в дальнейшем.

<u>2) Организовать самооценку учениками деятельности на уроке (класса, группы, своей собственной работы).</u>

Учащиеся соотносят поставленные цели и полученные результаты, устанавливают степень их соответствия и знаково фиксируют принятым в классе способом. Выставленная в той или иной форме отметка отражает степень удовлетворенности учащихся работой на уроке.

<u>3) Организовать фиксацию перспектив дальнейшей учебной деятельности и заданий для самоподготовки (домашнего задания).</u>

Исходя из самооценки, они определяют, что еще им надо сделать для усвоения нового знания, обсуждают и записывают домашнее задание.

Домашнее задание предлагается с элементами выбора, творчества, при этом оно должно обеспечивать подготовку учащихся к учебной деятельности на следующих уроках.

Таким образом, особенностью проведения этапа рефлексии учебной деятельности в 7–9 классах, в отличие от 5–6 классов, является то, что акцент делается, прежде всего, не на методе решения учебной задачи, как раньше, а на методе организации самой учебной деятельности.

Отметим, что в 7–9 классах средней школы приоритетными этапами урока являются этапы:

- ✓ мотивации и самоопределения в учебной деятельности;
- ✓ фиксирования затруднения и постановки проблемы;
- ✓ построения и реализации проекта выхода из затруднения;
- ✓ самостоятельной работы с самопроверкой;
- ✓ рефлексии деятельности на уроке.

При этом использование ТДМ на предыдущих этапах обучения и сформированность основных видов учебной деятельности позволяет учащимся в 7–9 классах

на этапе мотивации осознать механизм самоопределения;

на этапах фиксирования затруднения, постановки проблемы, проектирования и реализации проекта – зафиксировать метод рефлексивной самоорганизации, дающий ключ к эффективному преодолению затруднений;

на этапе самостоятельной работы с самопроверкой по эталону – процедуру контроля;

на этапе рефлексии деятельности – процедуру самооценки;

на всех без исключения этапах – нормы коммуникативного взаимодействия.

В процессе такой деятельности осваиваются приоритетные на данном возрастном этапе универсальные действия – социальные пробы, попытки строить общение в различных коллективах с учетом принятых в них норм взаимоотношений, рефлексия собственного поведения и адекватная самооценка своих действий, поступков и возможностей.

Уроки всех остальных типов также строятся на основе метода рефлексивной самоорганизации и, соответственно, проектируются и проводятся аналогичным образом с учетом целей, которые на них ставятся.

2. Уроки рефлексии

2.1. Урок рефлексии тренировочного типа (РТ)

Уроки *рефлексии тренировочного типа* ориентированы на формирование умения применять полученные знания в типовых и нестандартных условиях. Вместе с тем, на них продолжается работа по формированию умения выявлять и исправлять свои ошибки, но эта деятельность не является приоритетной.

1-й этап. ***Мотивация к тренировочной деятельности (1—2 мин)***

Основной целью данного этапа является включение учащихся в тренировочную деятельность на личностно значимом уровне.

Для реализации этой цели на уроке рефлексии тренировочного типа необходимо:

1) Организовать определение типа урока.

2) Организовать актуализацию принятого в классе способа работы на уроках РТ-типа, («надо»).

3) Организовать фиксацию учащимися тематических рамок урока («могу»).

4) Создать условия для возникновения у учеников внутренней потребности включения в тренировочную деятельность («хочу»).

Результатом данного этапа является положительная мотивация каждого учащегося к тренировочной деятельности на уроке.

2-й этап. ***Актуализация знаний и выполнение тренировочных упражнений (7 — 10 мин)***

Основной целью этапа является подготовка к выполнению тренировочных упражнений.

Для реализации этой цели на уроке рефлексии тренировочного типа необходимо:

1) Организовать актуализацию известных способов действий, достаточных для выполнения тренировочных заданий;

2) Зафиксировать актуализированные способы действий в речи;

4) Зафиксировать актуализированные способы действий в знаках (эталоны);

5) Организовать актуализацию мыслительных операций, достаточных для выполнения тренировочных заданий: анализ, сравнение, обобщение;

6) Организовать обобщение актуализированных способов действий;

7) Организовать представление спектра заданий, требующих тренировки рассматриваемых способов действий.

Данный этап является достаточно насыщенным по содержанию и по объему выполнения работы. Для того чтобы данный этап прошел успешно, необходимо, чтобы домашнее задание, предложенное учащимся накануне этого урока, содержало в себе все способы действий, достаточные для построения на этом уроке нового алгоритма, правила и т.д.

На рассматриваемом этапе урока предпочтительной является групповая форма работы.

В ходе урока целесообразно использовать индивидуальные карточки рефлексии, которые учащиеся заполняют по ходу урока. Такая карточка может иметь следующий вид.

Фамилия Имя:________________________			
	Домашняя работа (указать номера)	**Тренировочные упражнения** (указать номера)	**Самостоятельная работа** (указать номера)
Выполнено без ошибок			
Возникли затруднения			
Правила, над которыми надо поработать			

3-й этап. ***Построение плана деятельности (2 — 3 мин)***

Основной целью этапа является построение учащимися плана деятельности. Для реализации этой цели необходимо:

1) организовать постановку учащимися цели деятельности;

2) организовать определение учащимися средств (алгоритмы, модели, справочники и т.д.) для выполнения тренировочных заданий;

3) организовать построение учащимися плана работы с тренировочными заданиями[3].

План тренировочной работы может иметь следующий вид.

1. Выполнить *свое* тренировочное задание.
2. Сопоставить решение с подробным образцом.
3. Зафиксировать правильность выполнения заданий, если возникли затруднения, зафиксировать место и причину затруднения в своей карточке рефлексии.
4. На основе подробного образца исправить ошибки.
5. Выполнить следующее тренировочное задание.

На этом этапе предпочтительной является групповая форма работы.

4-й этап. ***Реализация плана деятельности (7 — 10 мин)***

Основной целью этого этапа является выполнение учащимися отобранных тренировочных заданий и коррекция полученных в ходе выполнения результатов.

Для реализации этой цели необходимо:

1) организовать реализацию построенного плана;

2) организовать фиксацию полученных результатов;

3) организовать анализ полученных результатов;

4) организовать коррекцию выявленных затруднений.

Каждый ученик выполняет задания самостоятельно, самостоятельно проводит самопроверку (подробные образцы находятся у учителя и он выдаёт их по просьбе. либо находятся на отдельном столе и учащиеся самостоятельно берут их оттуда). Ученики могут выполнить разное количество заданий. Каждый учащийся самостоятельно фиксирует свой результат в своей карточке.

5-й этап. ***Обобщение возникших затруднений во внешней речи (3 — 5 мин)***

Основной целью этапа является проговаривания формулировок способов действий, которые вызвали затруднение. Для этого необходимо:

1) организовать обсуждение типовых затруднений;

2) организовать проговаривание формулировок способов действий, которые вызвали затруднение.

Если у *многих* учащихся остались затруднения при выполнении какого-то упражнения, то рекомендуется разобрать это задание на доске.

6-й этап. ***Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону (5 — 10 мин)***

Основной целью этапа является организация проведения учащимися самопроверки усвоения тренируемых способов действия. Для этого необходимо:

1) организовать самостоятельное выполнение учащимися типовых заданий на тренируемые способы действия;

2) организовать самостоятельное соотнесение работы с эталоном для самопроверки;

[3] На первом уроке данного типа план составляется в подводящем диалоге. Со временем по мере необходимости данный план может уточняться.

3) организовать по результатам выполнения самостоятельной работы составление текста рефлексии деятельности по применению нового способа действия.

4) организовать обсуждение и запись домашнего задания.

7-й этап. ***Повторение (5 – 7 мин)***

Основной целью этапа является организация повторения ранее изученных тем.

8-й этап. ***Рефлексия деятельности на уроке (2 – 3 мин)***

Основной целью этапа является организация проведения учащимися рефлексии своей учебной деятельности на уроке и их самооценки. Для этого необходимо:

1) организовать фиксацию тренируемого материала на уроке;

2) организовать оценивание учащимися собственной деятельности на уроке;

3) организовать фиксацию неразрешённых затруднений на уроке как направлений будущей учебной деятельности.

На этом этапе все звенья урока соединяются в единую систему, тренируется способность к рефлексии своей деятельности.

Таким образом, на уроках рефлексии тренировочного типа сохранены все ключевые требования со стороны метода рефлексивной самоорганизации и теории поэтапного формирования умственных действий (П.Я. Гальперин).

Второй тип уроков рефлексии – уроки коррекционного типа (РК) – решает те же задачи, что и тренировочные уроки, но акцент в них перенесен на формирование умения выявлять и исправлять свои ошибки.

Уроки *рефлексии тренировочного типа* рекомендуется проводить, когда необходимо сформировать умение применять полученные знания в ситуациях, более сложных, чем ситуации, разобранные на предыдущих уроках ОНЗ. Например, когда требуется комбинация известных способов действий, либо уточнение способа для нестандартных условий его применения. Так, если предыдущий урок ОНЗ был посвящен теореме Виета и обратной ей теореме, то на уроке рефлексии тренировочного типа целесообразно предложить учащимся более сложные задания по этой теме, но таких типов, которые еще не разбирались на уроке ОНЗ.

Например, в качестве системы тренировочных заданий могут выступать следующие задачи, требующие применения теореме Виета и обратной ей.

• Составьте квадратное уравнение с целыми коэффициентами, если известно, что один из его корней равен $2+\sqrt{3}$.

• Пусть x_1, x_2 корни уравнения $2x^2 - 4x + 1 = 0$. Найдите значение выражения $x_1x_2^3 + x_1^3x_2$.

На 2-м этапе уроков РТ рекомендуется работать с заданиями на уровне поиска идеи решения, а на 3-м – строить план выполнения задания. К непосредственному выполнению этих заданий учащиеся приступают только на этапе реализации проекта и самостоятельной работы.

Так, при определении способа решения первого тренировочного задания учащиеся могут перечислить следующие шаги плана решения.

1. Вспомнить формулировку теоремы, обратной теореме Виета.

2. Подобрать второй корень, чтобы коэффициенты приведенного квадратного корня уравнения были целыми.

3. Найти сумму и произведение данного и сопряженного с ним корня.

4. Воспользовавшись теоремой, обратной теореме Виета, составить приведенное квадратное уравнение с полученными коэффициентами.

2.2. Урок рефлексии коррекционного типа (РК)

Уроки *рефлексии коррекционного типа* ориентированы на формирование умения выявлять и исправлять свои ошибки. Одновременно с этим, на них продолжается работа по формированию умения применять полученные знания в типовых и нестандартных условиях, но эта работа перестает быть ведущей.

1-й этап. ***Мотивация к коррекционной деятельности (1–2 мин)***

Основной целью данного этапа является включение учащихся в коррекционную деятельность на личностно значимом уровне.

Для реализации этой цели на уроке рефлексии коррекционного типа необходимо:

1) организовать определение типа урока;

2) организовать актуализацию принятого в классе способа работы на уроках РК-типа, («надо»);

3) организовать фиксацию учащимися тематических рамок урока («могу»);

4) создать условия для возникновения у учеников внутренней потребности включения в коррекционную деятельность («хочу»).

Результатом данного этапа является положительная мотивация каждого учащегося к коррекционной деятельности на уроке.

2-й этап. ***Актуализация знаний и фиксация затруднения в индивидуальной деятельности (10–12 мин)***

Основной целью данного этапа является подготовка мышления учащихся и осознание потребности в выявлении причин затруднений в процессе их деятельности.

Для реализации этой цели на уроке рефлексии коррекционного типа необходимо:

1) организовать самостоятельное воспроизведение учащимися изученных способов действий (понятий, алгоритмов, свойств и т.д.), выбранных для коррекционной деятельности, и примеров их применения;

2) организовать актуализацию мыслительных операций, достаточных для выполнения самостоятельной работы;

3) организовать выполнение *самостоятельной работы № 1* с фиксацией учащимися в каждом задании используемого эталона (A_1, A_2, $П_1$ и т.д.);

4) организовать самопроверку учащимися своих работ по образцу и фиксацию полученных результатов (без исправления ошибок);

5) организовать фиксацию собственных ошибок.

На уроках в 7–9 классах, в отличие от предыдущих ступеней обучения, учащиеся сами воспроизводят и фиксируют способы действий, с которыми они будут работать на данном уроке. Домашнее задание целесообразно составить так, чтобы из выполненных учащимися заданий можно было составить примеры на эти способы действий.

На данном этапе могут сочетаться фронтальная, групповая и индивидуальная формы работы.

В самостоятельной работе на 5–6 минут предлагаются задания на использование выделенных способов действий. Во время выполнения самостоятельной работы учитель закрывает доску, на которой зафиксированы повторенные алгоритмы и определения понятий.

При самопроверке учащимися своей работы на данном этапе не предполагается выяснение причин ошибок и их исправление. Учащиеся лишь фиксируют правильность выполнения заданий по готовому образцу.

Отметим, что способности к грамотному самоконтролю и рефлексивному анализу учебной деятельности формируются у учащихся при работе по программе «Учусь учиться» в начальной школе и в 5–6 классах основной школы. К 7 классу учащиеся хорошо знакомы с механизмом самопроверки по образцу и эталону, со структурой рефлексивного анализа, поэтому в 7–9 классах они способны уже сами фиксировать все шаги этих действий, а учитель имеет возможность лишь отслеживать и корректировать этот процесс.

Таким образом, данный этап завершается фиксацией затруднений, возникших при решении самостоятельной работы.

3-й этап. ***Локализация индивидуальных затруднений (2—3 мин)***

<u>*Основной целью*</u> данного этапа является определение места и причины своих ошибок на основе пошагового сопоставления работ с эталоном для самопроверки.

При проверке работы используется принятый в классе алгоритм исправления ошибок. Эти алгоритмы конструировали сами учащиеся, начиная с первых классов начальной школы, постепенно уточняя их и усложняя.

Соотнесение своего решения с эталоном позволяет «проговорить» каждый шаг решения, уточнить используемые способы действий, обосновать правильность своего решения или выявить место и причину ошибки, что способствует развитию логического мышления и речи.

После проверки своих работ по эталону, учащиеся, успешно справившиеся с самостоятельной работой, могут приступить к выполнению заданий творческого уровня или выступать в качестве консультантов. Таким образом, у каждого ученика есть возможность работать по своей собственной образовательной траектории, что принципиально важно на этапе обучения в 7—9 классах основной школы.

4-й этап. ***Постановка цели коррекционной деятельности (1 мин)***

<u>*Основной целью*</u> данного этапа является постановка учащимися индивидуальных целей коррекционной деятельности.

Поскольку способ и план работы над ошибками уже построен и отработан в алгоритме исправления ошибок на протяжении нескольких лет обучения, то этап проектирования на уроках рефлексии коррекционного типа сворачивается до постановки цели.

5-й этап. ***Коррекция выявленных затруднений (4—5 мин)***

<u>*Основной целью*</u> данного этапа является исправление ошибок с помощью алгоритма, принятого в классе, и с использованием эталонов выделенных способов действий.

Для реализации этой цели на уроке рефлексии коррекционного типа необходимо

для учащихся, допустивших ошибки:

1) организовать исправление ошибок с помощью с помощью алгоритма, принятого в классе, и с использованием эталонов выделенных способов действий;

2) организовать самопроверку выполненных заданий;

для учащихся, не допустивших ошибки:

1) организовать выполнение заданий более высокого уровня сложности по изучаемой теме или заданий творческого уровня (требующих построения новых методов решения), которые они выполняют вплоть до этапа повторения.

В результате прохождения данного этапа учащиеся должны исправить все свои ошибки и уточнить для себя способы действий, в которых возникли затруднения.

6-й этап. ***Обобщение возникших затруднений во внешней речи (3—4 мин)***

<u>*Основной целью*</u> этапа является проведение способов действий, в которых возникли затруднения, через внешнюю речь.

Для реализации этой цели на уроке рефлексии коррекционного типа необходимо:

1) организовать обсуждение типовых затруднений в группах;

2) организовать проговаривание формулировок способов действий, которые вызвали затруднение.

Коммуникативное взаимодействие в группах можно организовать по следующему плану:

- перечислить типы примеров, в которых ученики группы допустили ошибки;
- перечислить алгоритмы, нарушенные в примере каждого типа;
- проговорить формулировки способов действий, которые вызвали затруднения.

7-й этап. ***Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону (7–15 мин)***

<u>*Основной целью*</u> этапа является самопроверка своего умения применять изученные способы действий.

Для реализации этой цели на уроке рефлексии коррекционного типа необходимо:

1) организовать самостоятельное выполнение учащимися заданий на изученные способы действий;

2) организовать самопроверку учащимися своих заданий с помощью эталона для самопроверки;

3) организовать индивидуальную рефлексию учащимися достижения цели своей учебной деятельности на уроке;

4) создать ситуацию успеха для каждого ученика.

8-й этап. ***Решение задач и повторение (5–15 мин)***

<u>*Основной целью*</u> этапа является: включение изученных способов действий в систему знаний; решение задач на повторение.

Для реализации этой цели на уроке рефлексии коррекционного типа необходимо:

1) организовать решение учащимися зданий, в которых новые способы действия связываются с материалом, изученным ранее;

2) организовать решение учащимися зданий, требующих системной тренировки, и заданий на подготовку к изучению следующих тем.

9-й этап. ***Рефлексия коррекционной учебной деятельности на уроке (2–3 мин)***

<u>*Основной целью*</u> этапа является проведение учащимися рефлексии учебной деятельности на уроке, обсуждение и запись домашнего задания.

Для реализации этой цели на уроке рефлексии коррекционного типа необходимо:

1) организовать фиксацию степени соответствия поставленной цели и результатов учебной деятельности;

2) организовать фиксацию причин (алгоритмов, правил, понятий и т.д.) затруднений, возникших на уроке;

3) организовать фиксацию способа исправления ошибок (алгоритма исправления ошибок);

4) организовать самооценку учениками работы на уроке – класса, группы, своей собственной работы;

5) организовать фиксацию неразрешенных на уроке затруднений как направлений будущей учебной деятельности;

6) организовать обсуждение и запись домашнего задания.

На данном этапе все звенья урока соединяются в единую систему, тренируется способность к рефлексии собственной деятельности и самооценке.

Таким образом, на уроках рефлексии коррекционного типа также сохранены все ключевые требования со стороны метода рефлексивной самоорганизации и теории поэтапного формирования умственных действий (П.Я. Гальперин).

Следующий тип уроков – уроки обучающего и развивающего контроля (ОРК). Они проводятся в соответствии с технологией деятельностного метода и предполагают **два этапа**, которые проводятся на двух уроках. На первом из них учащиеся выполняют контрольную работу и проводят самоконтроль выполненных заданий, а на втором – корректируют свои ошибки. Таким образом, в ходе этих уроков учащиеся осваивают функцию контроля результатов своей учебной деятельности и коррекции выявленных затруднений.

Уроки *рефлексии коррекционного типа* рекомендуется проводить, когда необходимо закрепить умение применять полученные знания в типовых ситуациях и предоставить возможность по формированию умения применять их в нестандартных ситуациях (в зависимости от уровня подготовленности учащихся). Поэтому на уроке рефлексии коррекционного типа целесообразно предлагать учащимся самостоятельную работу с обязательной частью (где содержатся типовые задания, которые уже разбирались), и дополнительной частью (с более сложными заданиями).

Учащиеся, допустившие ошибки в обязательной части, работают над ошибками и отрабатывают минимум – содержание, определенное стандартом, необходимое для усвоения. Остальные возвращаются к работе с дополнительной частью самостоятельной работы, после чего переходят к заданиям творческого уровня.

При этом у учащихся, не допустивших ошибок в обязательной части самостоятельной работы, формируется умение применять полученные знания в ситуациях, более сложных, чем в разобранных на предыдущих уроках ОНЗ ситуациях (они работают с более сложными заданиями). Такая организация работы на уроке соответствует принципу минимакса, заложенному в дидактической системе деятельностного метода Л.Г. Петерсон.

Так, самостоятельная работа по теме: «Терема Виета и обратная к ней теорема» может иметь следующее содержание.

Обязательная часть:

№1. Решите уравнение $x^2 + 2x - 15 = 0$, используя теорему, обратную теореме Виета.

№ 2. Один из корней квадратного уравнения $x^2 + 13x + c = 0$ равен 5. Найдите свободный член c этого уравнения.

Дополнительная часть:

№ 3. Пусть x_1, x_2 корни уравнения $5x^2 + \sqrt{5}x - 1 = 0$. Найдите значение выражения $x_1^2 + x_2^2$.

№ 4. Уравнение $x^2 + 9x - 1 = 0$ имеет корни x_1 и x_2. Составьте уравнение, корнями которого являются числа $5x_1 + 4$ и $5x_2 + 4$.

3. Урок обучающего и развивающего контроля (ОРК)

I урок

1-й этап. ***Мотивация к контролирующей деятельности (1–2 мин)***

Основной целью данного этапа является включение учащихся в деятельность контроля на личностно значимом уровне.

Для реализации этой цели на уроке ОРК необходимо:

1) организовать определение типа урока;

2) организовать актуализацию способа работы на уроках ОРК, установить форму и процедуру контроля, предъявить критерий выставления оценки («надо»);

3) организовать фиксацию учащимися тематических рамок контроля («могу»);

4) создать условия для возникновения у учеников внутренней потребности включения в коррекционную деятельность («хочу»).

Результатом данного этапа является положительная мотивация каждого учащегося к деятельности контроля на уроке.

2-й этап. ***Актуализации знаний и фиксации затруднения в деятельности (39 – 43 мин)***

Основной целью этапа является подготовка мышления учащихся к рефлексии своей деятельности. Для этого необходимо:

1) организовать перечисление учащимися контролируемых способов действий (норм);

2) организовать активизацию мыслительных операций, необходимых для выполнения контрольной работы, внимание и т.д.;

3) организовать индивидуальную деятельность учащихся (провести контрольную работу);

4) организовать сопоставление учащимися своих работ по готовому образцу с фиксацией результатов (без исправления ошибок);

5) предоставить возможность учащимся провести самооценку своих работ по заранее обоснованному критерию.

Отличительной особенностью данного этапа от аналогичного этапа в 5-6 классах является то, что контролируемые способы действий перечисляются самими учащимися без проговаривания их формулировок и знаковых фиксаций. Для проведения данного этапа учителю необходимо подготовить образец для самопроверки и критерий выставления отметки. Объем и уровень контрольной работы в соответствии с принципом минимакса определяется государственным стандартом. Данный этап завершается фиксацией своих ошибок, выставлением самооценки и сдачей контрольной работы учителю.

II урок

Данный урок соответствует анализу контрольной работы в традиционной школе и проводится после проверки контрольной работы учителем.

3-й этап. ***Локализация индивидуальных затруднений (3 — 4 мин)***

Основной целью этапа является проведение учащимися рефлексивного анализа своей контрольной работы. Для реализации этой цели необходимо:

1) организовать постановку учащимися цели своей деятельности;

2) мотивировать учащихся к сопоставлению своих работ по эталону для самопроверки;

3) организовать сопоставление работ по эталону для самопроверки с целью:

а) организации выявления учащимися места затруднения;

б) организации выявления учащимися причины затруднения;

в) организации фиксации отсутствия затруднений в ходе решения и его обоснования.

Учащиеся на этом этапе сравнивают свое решение с эталоном. Сравнение с эталоном необходимо для соотнесения своего решения с используемыми способами действий. Как отмечалось выше, это способствует формированию речи, логического мышления, умению критериально обосновывать свою точку зрения.

Данный этап проводится аналогично соответствующему этапу урока рефлексии. Отличительной особенностью данного этапа является то, что на этом этапе анализируется правильность самопроверки своей работы. Таким образом, на данном этапе тренируется способность к грамотному контролю и самоконтролю.

4-й этап. ***Постановка цели коррекционной деятельности (1 мин)***

Основной целью данного этапа является постановка учащимися индивидуальных целей коррекционной деятельности.

Поскольку способ и план работы над ошибками уже построен и отработан в алгоритме исправления ошибок на протяжении нескольких лет обучения, то этап проектирования сворачивается до постановки цели.

5-й этап. ***Коррекция выявленных затруднений (4—5 мин)***

Основной целью данного этапа является исправление ошибок с помощью алгоритма, принятого в классе, и с использованием эталонов выделенных способов действий.

Для реализации этой цели на уроке необходимо

для учащихся, допустивших ошибки:

1) организовать исправление ошибок с помощью с помощью алгоритма, принятого в классе, и с использованием эталонов выделенных способов действий;

2) организовать самопроверку выполненных заданий;

для учащихся, не допустивших ошибки:

1) организовать выполнение заданий более высокого уровня сложности по изучаемой теме или заданий творческого уровня (требующих построения новых методов решения).

Данный этап проводится аналогично соответствующему этапу урока рефлексии. Учащиеся, не допустившие ошибок, продолжают выполнять задания творческого уровня или участвуют в коммуникации в позициях организатора, понимающего или критика. На данном этапе предпочтительной является групповая форма работы.

6-й этап. ***Обобщение затруднений во внешней речи (3 – 4 мин)***

Основной целью этапа является усвоение способов действий, вызвавших затруднение.

Для реализации этой цели необходимо:

1) организовать обсуждение типовых затруднений;

2) организовать перечисление способов действий, которые вызвали затруднения.

На данном этапе целесообразно организовать коммуникативное взаимодействие с опорой на вербальную и знаковую фиксацию. Отметим, что если позволяет время, целесообразно проговорить формулировки способов действий, которые вызвали затруднения.

7-й этап. ***Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону (10 – 15 мин)***

Основной целью этапа является интериоризация способов действий, вызвавших затруднения, индивидуальная рефлексия достижения цели, создание ситуации успеха.

Для реализации этой цели необходимо, чтобы учащиеся, допустившие ошибки в контрольной работе:

1) выполнили самостоятельную работу, аналогичную контролируемой работе, выбирая только те задания, в которых допущены ошибки;

2) провели самопроверку своих работ по готовому эталону и зафиксировали знаково результаты.

Учащиеся, не допустившие ошибки в контрольной работе, выполняют самопроверку заданий творческого уровня по предложенному образцу или эталону для самопроверки.

Работа имеет узкую типовую направленность и предполагает решений заданий, аналогичных заданиям, предлагаемым в контрольной работе. Каждый учащийся, допустивший ошибку при выполнении контрольной работы, на данном этапе должен иметь возможность проверить насколько он разобрался в причине этой ошибки и свою способность решать задания такого типа, насколько он достиг поставленной перед собой на уроке цели. Отметим, что на данном этапе, также обращается внимание на процедуру грамотного контроля.

8-й этап. ***Включение в систему знаний и повторение (5 – 10 мин)***

Основной целью этапа является включение используемых способов действий в систему знаний, повторение и закрепление ранее изученного.

При положительном результате предыдущего этапа для реализации этой цели необходимо:

1) организовать выполнение заданий, в которых рассматриваются способы действий, связанные с ранее изученными и между собой;

2) организовать выполнение заданий на подготовку к изучению следующих тем.

При отрицательном результате предыдущего этапа необходимо повторить предыдущий этап, выполнив аналогичные задания.

9-й этап. ***Рефлексия деятельности на уроке каждого учащегося и класса в целом***

Основной целью этапа является проведение учащимися рефлексивного анализа своей деятельности, деятельности своей группы и осознание механизма деятельности по контролю.

Для реализации этой цели необходимо:

1) организовать проговаривание механизма деятельности по контролю;

2) организовать рефлексию деятельности на уроке каждого учащегося и класса в целом;

3) зафиксировать степень соответствия поставленной цели и результатов деятельности;

4) организовать проведение самооценки учениками деятельности на уроке;

5) организовать анализ, в ходе которого учащиеся определяют, где и почему были допущены ошибки, способы их исправления;

6) организовать перечисление способов действий, вызвавших затруднение;

7) организовать работу учащихся по определению заданий для самоподготовки (домашнее задание с элементами выбора, творчества);

8) организовать работу учащихся по определению целей последующей деятельности.

Данный этап можно организовать как в форме коммуникативного взаимодействия, так и организовать самостоятельную деятельность учащихся.

Информационно-образовательная среда, реализующая системно-деятельностный подход

Важным ресурсом достижения учащимися результатов образования в курсе алгебры «Учусь учиться» для 7–9 классов является **создание информационно-образовательной среды,** адекватной деятельностному методу организации образовательного процесса.

Исходя из условий воспроизводимости базового процесса в системе деятельности «учитель – ученик», реализация технологии деятельностного метода обучения в практическом преподавании обеспечивается следующей системой **дидактических принципов.**

1) *Принцип деятельности* – заключается в том, что ученик, получая знания не в готовом виде, а добывая их сам, осознает при этом содержание и формы своей учебной деятельности, понимает и принимает систему ее норм, активно участвует в их совершенствовании, что способствует активному успешному формированию его общекультурных и деятельностных способностей, общеучебных умений.

2) *Принцип непрерывности* – означает преемственность между всеми ступенями и этапами обучения на уровне технологии, содержания и методик с учетом возрастных психологических особенностей развития детей.

3) *Принцип целостности* – предполагает формирование у учащихся обобщенного системного представления о мире (природе, обществе, самом себе, социокультурном мире и мире деятельности, о роли и месте каждой науки в системе наук, а также роли ИКТ).

4) *Принцип минимакса* – заключается в следующем: школа предоставляет каждому ученику возможность освоения содержания образования на «максимальном» уровне (определяемом зоной ближайшего развития возрастной группы) и обеспечивает условия для его усвоения на уровне социально безопасного «минимума» (федерального государственного образовательного стандарта).

5) *Принцип психологической комфортности* – предполагает снятие всех стрессообразующих факторов учебного процесса, создание в школе и на уроках доброжелательной атмосферы, ориентированной на реализацию идей педагогики сотрудничества, развитие диалоговых форм общения.

6) *Принцип вариативности* – предполагает формирование у учащихся способностей к систематическому перебору вариантов и адекватному принятию решений в ситуациях выбора.

7) *Принцип творчества* – означает максимальную ориентацию на творческое начало в образовательном процессе, создание условий для приобретения учащимся собственного опыта творческой деятельности.

Федеральный государственный образовательный стандарт общего образования ориентирует на **системное использование средств ИКТ** для решения коммуникативных и познавательных задач как необходимое условие подготовки школьников к жизни в современном информационном обществе.

Реализация в образовательном процессе по математике дидактической системы деятельностного метода обучения способствует созданию в школе главного ресурса перехода к широкому внедрению ИКТ – формированию у всех участников образовательного процесса (как учащихся, так и учителей) личностных качеств, стиля мышления и поведения, адекватных требованиям жизни в информационном обществе (развитие логического мышления, способности к структурированию знаний, их организации и представлению в знаково-символическом виде, освоение метода моделирования, формирование умения понимать и четко следовать предписаниям, готовности к самоизменению и саморазвитию и др.).

Кроме того, средства обучения и методического обеспечения в курсе математики «Учусь учиться» побуждают школьников и учителей овладевать компьютерными технологиями, поскольку их использование реально помогает сократить время на подготовку уроков, диагностику результатов обучения, а главное – многократно улучшает качество образовательного процесса и его результативность (электронные тренинги для учащихся, электронные сценарии уроков с использованием цифровых средств обучения, электронные средства диагностики результатов обучения и др.)

Итак, система дидактических принципов деятельностного метода обучения, построенная на основе методологической версии системно-деятельностного подхода, позволяет создать при работе по курсу алгебры «Учусь учиться» для 7–9 классов информационно-образовательную среду, адекватную реализации единого учебно-воспитательного и здоровьесберегающего процесса деятельностного типа.

Достижение результатов освоения основной образовательной программы ФГОС

Достижение предметных результатов ООП в курсе «Учусь учиться»

Учебное содержание по всем выделенным содержательно-методическим линиям полностью обеспечивает выполнение требований к предметным результатам ФГОС основного общего образования разделов «Математика. Алгебра» предметной области «Математика и информатика», а именно:

1) ***линия моделирования*** направлена на формирование следующих предметных результатов: формирование представлений о математике как о методе познания действительности, позволяющем описывать и изучать реальные процессы и явления; развитие умений применять изученные понятия, результаты, методы для решения задач практического характера и задач из смежных дисциплин с использованием при необходимости справочных материалов, компьютера, пользоваться оценкой и прикидкой при практических расчётах;

2) ***логическая линия*** направлена на формирование следующих предметных результатов: развитие умений работать с учебным математическим текстом, точно и грамотно выражать свои мысли с применением математической терминологии и символики, проводить логические обоснования, доказательства математических утверждений;

3) ***числовая линия*** направлена на формирование следующих предметных результатов: развитие представлений о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел; овладение навыками устных, письменных, инструментальных **вычислений**;

4) ***алгебраическая линия*** направлена на формирование следующих предметных результатов: овладение символьным языком алгебры, приёмами выполнения

тождественных преобразований выражений, решения уравнений, систем уравнений, неравенств и систем неравенств; умения моделировать реальные ситуации на языке алгебры, исследовать построенные модели с использованием аппарата алгебры, интерпретировать полученный результат;

5) ***функциональная линия*** направлена на формирование следующих предметных результатов: овладение системой функциональных понятий, развитие умения использовать функционально-графические представления для решения различных математических задач, для описания и анализа реальных зависимостей;

6) ***линия анализа данных*** направлена на формирование следующих предметных результатов: овладение простейшими способами представления и анализа статистических данных; формирование представлений о статистических закономерностях в реальном мире и о различных способах их изучения, о простейших вероятностных моделях; развитие умений извлекать информацию, представленную в таблицах, на диаграммах, графиках, описывать и анализировать массивы числовых данных с помощью подходящих статистических характеристик, использовать понимание вероятностных свойств окружающих явлений при принятии решений.

Достижение личностных результатов ООП в курсе «Учусь учиться»

Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования устанавливает следующие требования к личностным результатам образования.

1. Воспитание российской гражданской идентичности: патриотизма, основ культурного наследия народов России и человечества, усвоение гуманистических и демократических ценностных ориентаций, воспитание чувства ответственности.

С этой целью тексты заданий в учебниках погружают ученика в мир российской действительности (имена персонажей текстовых задач, описанные в них ситуации и т.д.), несут в себе гуманистический потенциал созидания и добра.

Разнообразные задания вычислительного и исследовательского характера могут стать поводом для разворачивания внеурочной проектной работы учащихся, направленной на их более глубокое знакомство с основами культурного наследия народов России и человечества.

Для реализации данных проектов можно организовать самостоятельную работу учащихся с информацией: они могут пользоваться справочной и художественной литературой, энциклопедиями, электронными образовательными ресурсами. Таким образом, у учащихся развивается интерес к истории познания, достижениями российской математической школы, воспитывается чувство гордости за свою страну.

Использование технологии и системы дидактических принципов деятельностного метода обучения в ходе образовательного процесса по курсу алгебры «Учусь учиться» для 7–9 классов формируют у учащихся демократические ценностные ориентации и адекватные им личностные качества: понимание возможности разных точек зрения, способность к их согласованию на основе выработанных критериев, умение точно выражать свои мысли, аргументировать свою позицию, следовать согласованным правилам и др.

2. Формирование ответственного отношения к учению, готовности и способности обучающихся к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию, осознанному выбору и построению дальнейшей индивидуальной траектории образования на базе ориентировки в мире профессий и профессиональных предпочтений, с учётом устойчивых познавательных интересов, а также на основе формирования уважительного отношения к труду, развития опыта участия в социально значимом труде.

Для развития у учащихся ответственного отношения к учению, готовности и способности к саморазвитию и самообразованию на основе мотивации к обучению и познанию в курсе алгебры «Учусь учиться» для 7–9 классов используется методологически обоснованный механизм «надо» – «хочу» – «могу».

Прежде всего, применение технологии деятельностного метода обучения последовательно и поэтапно формирует у ученика понимание нормы учения (то есть того, «что *мне надо* делать» как ученику). С этой целью в курсе математики «Учусь учиться» используется норма учебной деятельности, построенная в общей теории деятельности (Г.П. Щедровицкий, О.С. Анисимов и др.) и адаптированная к образовательному процессу для учащихся 5–9 классов.

Одновременно для формирования у учащихся внутренней потребности включения в учебную деятельность («я это *хочу*») в классе создается психологически комфортная образовательная среда, где ученик не боится высказать свое мнение, где его трудолюбие, старание, ответственное отношение к делу встречает доброжелательную поддержку, где он приобретает позитивный опыт переживания ситуации успеха, а с другой стороны – обеспечивается возможность его развития в собственном темпе на уровне своего возможного максимума («я это *могу*»).

Технологически это обеспечивается реализацией в учебном процессе по математике деятельностного метода обучения и соответствующей системы дидактических принципов (принципов психологической комфортности, минимакса, вариативности, деятельности, непрерывности).

Кроме того, созданию психологически комфортной образовательной среды способствует содержание заданий, которое подобрано так, чтобы поддерживать у учащихся интерес к занятиям математикой и желание включаться в учебный процесс по математике в зоне своего ближайшего развития.

С этой целью используются следующие педагогические приемы.

1) Включение в учебное содержание заданий, выполнение которых вызывает у учащихся интерес и дает положительный эмоциональный заряд.

В 7–9 классах это задания на поиск закономерностей, соревнования, решение занимательных задач и т.д.

2) Многофункциональная целевая направленность заданий, позволяющая в одном задании тренировать достаточно большую группу способностей, что снижает нагрузку на детей и существенно экономит учебное время.

3) Включение в курс разноуровневых заданий, позволяющих создавать ситуацию успеха для учащихся разного уровня подготовки.

Использование перечисленных приемов способствует развитию у учащихся мотивов учебной деятельности и формированию личностного смысла учения. По мере освоения нормы учебной деятельности, понимания и принятия на личностно значимом уровне социальной роли «ученика» внешние мотивы сменяются внутренними и тем самым создаются условия для формирования у них устойчивой учебно-познавательной мотивации и готовности к саморазвитию.

Для формирования у учащихся готовности и способности к построению дальнейшей индивидуальной траектории образования в курсе предлагается значительное число разноуровневых заданий от обязательного для всех минимума до уровня Всероссийских олимпиад школьников. Таким образом, создаются условия для адекватного определения учащимися уровня своей математической подготовки, своих интересов и возможностей, что поможет им осознанно выбрать собственные профессиональные предпочтения.

3. Формирование целостного мировоззрения, соответствующего современному уровню развития науки и общественной практики, учитывающего социальное, культурное, языковое, духовное многообразие современного мира.

Механизмом формирования целостного представления о мире (природе – обществе – самом себе) в курсе алгебры «Учусь учиться» для 7–9 классов является дидактический принцип целостности, в соответствии с которым в данном курсе раскрывается происхождение математических понятий, их связь с реальными проблемами окружающего мира, место и роль математики в системе знаний.

Этому способствует, прежде всего, включение учащихся на всех уроках в самостоятельную учебную деятельность по конструированию новых понятий и способов действия, что позволяет каждому ученику в собственном опыте пройти путь рождения математических знаний, осознать их необходимость и значимость, связь с жизнью, практикой, другими областями познания.

Для реализации этой цели, с одной стороны, учебное содержание по всем темам курса адаптировано для системной реализации деятельностного метода обучения, а с другой, – в учебное содержание регулярно включаются задачи прикладной направленности, как задачи с житейскими ситуациями, так и задачи, возникающие в других областях знания, например, в биологии, географии, физике, лингвистике.

Подобные задания могут стать началом организации внеурочной проектной работы учащихся (как индивидуальной, так и групповой) с использованием справочной литературы и электронных образовательных ресурсов.

4. Формирование осознанного, уважительного и доброжелательного отношения к иному мнению, готовности и способности вести диалог с другими людьми и достигать в нём взаимопонимания.

Формирование у учащихся осознанного уважительного и доброжелательного отношения к иному мнению в курсе алгебры «Учусь учиться» для 7–9 классов технологически обеспечивается системным использованием деятельностного метода обучения. Так, при изучении любой темы курса на этапе пробного учебного действия (2 этап уроков в ТДМ) учащиеся высказывают свои версии ответов, на этапе проектирования нового способа действия и реализации проекта (4–5 этапы уроков в ТДМ) – предлагают свои способы решения возникшей проблемы, выдвигают свои гипотезы. При этом они не знают заранее, кто из них прав, поэтому у них вырабатывается навык осознанного уважительного и доброжелательного отношения к каждой версии, как возможному верному варианту.

Опыт получения согласованного варианта на каждом уроке воспитывает у учащихся готовность и способность вести диалог с другими людьми и достигать в нем взаимопонимания.

5. Освоение социальных норм, правил поведения, ролей и форм социальной жизни в группах и сообществах.

В курсе алгебры «Учусь учиться» для 7–9 классов формируется система норм выполнения учебных действий по математике, которые зафиксированы в форме *эталонов* к каждому уроку.

Эталоны строят сами учащиеся в ходе собственной учебной деятельности, что развивает у них опыт участия в социально значимом труде и вырабатывает уважительное отношение к труду.

С другой стороны, эталоны представляют собой общую согласованную позицию учащихся о правилах, нормах выполнения математических преобразований, поэтому их можно рассматривать как систему построенных самими учащимися критериев, своеобразный «свод математических законов», которыми они пользуются для обоснования правильности своей позиции, выявления причин отклонения своих действий от установленных ими же самими норм, а также для коррекции, контроля и оценки выполненных учебных действий по математике.

Структурированность математического знания помогает сформировать у учащихся при системном использовании деятельностного метода обучения опыт правового, ответственного поведения, подчинения своих действий общепринятым нормам.

Поскольку изучение математических структур ведет к образованию адекватных им умственных структур, составляющих основу и механизмы мышления и поведения человека вообще (Ж. Пиаже), то овладение инструментарием критериальной оценки выполняемых учебных действий по математике позволяет учащемуся на каждом уроке, при самоконтроле и рефлексии собственных учебных действий на основе эталонов, вырабатывать ответственное отношение к выполнению и самооценке не только математических действий, но и любых действий на основе нравственных и социальных норм, правил поведения, ролей и форм социальной жизни в группах и сообществах как в жизненной практике, так и в любой трудовой деятельности.

6. Развитие морального сознания и компетентности в решении моральных проблем на основе личностного выбора, формирование нравственных чувств и нравственного поведения, осознанного и ответственного отношения к собственным поступкам.

Особенностью решения данных задач в курсе алгебры «Учусь учиться» для 7—9 классов является то, что систематическое включение учащихся в учебную деятельность на основе деятельностного метода обучения придает этому процессу более глубокий и личностный характер.

Проблемные ситуации нравственно-этического характера, которые неизбежно возникают у учащихся в совместной учебной деятельности по созданию системы математических знаний, являются своеобразными моделями реальных жизненных проблем, связанных с нормами поведения и нравственности, отношений друг с другом. Таким образом, учитель получает возможность в связи с поставленными в их совместной деятельности, а потому актуальными и личностно значимыми для них ситуациями организовать на уроке или во внеурочной деятельности во второй половине дня осознание и принятие как личной ценности категорий порядочности и правдивости, терпимости и великодушия, вежливости и уважения, помочь им выработать доброжелательность и отзывчивость, культурные способы общения и нравственного поведения.

7. Формирование коммуникативной компетентности в общении и сотрудничестве со сверстниками и взрослыми в процессе образовательной, учебно-исследовательской, творческой и других видов деятельности.

С этой целью в данном курсе предусмотрена работа в парах, группах, совместная исследовательская и проектная работа (в том числе, и во внеурочной деятельности), которая строится на основе норм коммуникативного взаимодействия и предполагает, в частности, освоение каждым учеником коммуникативных позиций «автора», «понимающего», «критика», «арбитра».

Реализация деятельностного метода обучения позволяет сформировать у учащихся не только первичный опыт выхода из спорных ситуаций, но и знание общего способа действий в ситуации конфликта, а также опыт успешного и осознанного применения этого способа, в результате которого требуемые умения вырабатываются системно и надежно.

Так, на уроках открытия нового знания учащиеся в ходе построения нового способа действий по математике всегда сталкиваются с ситуацией разных мнений. При этом они усваивают, что самый короткий путь согласования позиций заключается в том, чтобы понять причину разногласия, а затем найти и реализовать способ устранения этой причины на основе согласованных способов действий.

Этот путь они проходят сначала под руководством учителя, не осознавая его, затем обобщают свой опыт, и после этого сознательно применяют правила, выработанные в своей учебной деятельности. В процессе работы в парах и группах они тренируются в самостоятельном применении усвоенных правил разрешения конфликтных ситуаций.

Учебное содержание по алгебре, сформулированное в виде четких и однозначных правил и алгоритмов, облегчает освоение способов грамотного обоснования своей позиции, разрешения проблемных ситуаций и тем самым помогает учащимся переносить изученные способы действий в жизненную практику.

8. Формирование ценности здорового образа жизни, усвоение правил индивидуального и коллективного безопасного поведения в чрезвычайных ситуациях.

На уроках математики по курсу алгебры «Учусь учиться» для 7–9 классов учащиеся приобретают системный опыт преодоления затруднений на основе метода рефлексивной самоорганизации, осваивают и многократно успешно применяют алгоритмы эффективного разрешения проблемных ситуаций (на примере математических проблем). Благодаря этому у них формируется умение воспринимать ситуации затруднения не как повод для тревоги и огорчения, а как сигнал для активного поиска способов и средств их преодоления. Развитие волевой саморегуляции, способности осуществлять верный выбор стратегии поведения и преодоления возникших трудностей.

Содержание и методики курса алгебры «Учусь учиться» предполагают системное освоение учащимися всего комплекса организационно-рефлексивных действий. Таким образом, данный курс становится площадкой, на которой у учащихся в процессе изучения математики формируются адаптационные механизмы сохранения и поддержки своего здоровья, продуктивного поведения и действия в любых проблемных ситуациях, требующих изменения себя и окружающей действительности.

9. Развитие опыта экологически ориентированной рефлексивно-оценочной и практической деятельности в жизненных ситуациях.

Развитие опыта рефлексивно-оценочной деятельности в курсе алгебры «Учусь учиться» для 7–9 классов осуществляется на уроках рефлексии и обучающего контроля знаний, а также на этапах самоконтроля и рефлексии учебной деятельности уроков всех типов. Опыт самопроверки и критериальной самооценки своей работы и учебной деятельности в целом, выявление и коррекции своих ошибок вырабатывают у учащихся ответственное отношение к собственным действиям и поступкам, что и составляет основу современного экологического мышления и рефлексивно-оценочной и практической деятельности в жизненных ситуациях.

11. Развитие эстетического сознания, освоение творческой деятельности эстетического характера.

Формирование у учащихся эстетического сознания средствами предмета математики в курсе алгебры «Учусь учиться» для 7–9 классов основано на результатах исследований эстетической привлекательности математических объектов, из которых следует, что эстетические чувства у ученика при изучении математики возникают через восприятие гармонии (например, стройности и убедительности математических рассуждений) и такие характеристики математического знания, как неожиданно простое и наглядное решение сложной задачи, универсальность математического языка, выражение с его помощью взаимосвязи внешне различных явлений, упорядоченность и структурированность математических объектов, их внутреннее единство.

Дидактической основой формирования мотивации к творческому труду в данном курсе является принцип творчества, который обеспечивается, прежде всего, возможностью для каждого ученика на уроках открытия нового знания включаться в процесс создания новых способов действий. Помимо этого, учащимся систематически предлагаются задания творческого характера, где им требуется проявить активность, создать что-то новое.

В курсе практикуются также творческие домашние задания, где учащимся предлагается найти и представить некоторую информацию, придумать свои примеры, задачи или уравнения, конкретизирующие изученный в классе новый способ действий, либо создать собственный проект.

Таким образом, в курсе алгебры «Учусь учиться» для 7–9 классов у учащихся развивается эстетическое сознание и формируются опыт творческой деятельности с учетом специфики предмета математики.

Достижение метапредметных результатов ООП в курсе «Учусь учиться»

Возможность достижения метапредметных результатов образования, определенных ФГОС, обеспечивается в курсе алгебры «Учусь учиться» для 7–9 классов в процессе формирования познавательных, регулятивных и коммуникативных УУД на основе технологии и системы дидактических принципов детельностного метода обучения и соответствующих им содержания, методик и методического обеспечения данного курса.

Вначале на уроках математики в ТДМ учащиеся приобретают первичный опыт выполнения осваиваемого УУД. Затем организуется мотивация учащихся к его самостоятельному выполнению и знакомство с соответствующей нормой (правилом, алгоритмом) выполнения данного УУД (или структуры учебной деятельности в целом). После этого учащиеся уже осознанно включают изученное УУД в практику обучения на уроках и во внеурочной деятельности при организации процессов самовоспитания и саморазвития. В завершение, учащимся предлагается самоконтроль изучаемых УУД и обучающий контроль.

Таким образом, формирование каждого УУД, входящего в структуру учебной деятельности, проходит через все необходимые, методологически обоснованные этапы:

1) опыт действия и мотивация;
2) знание способа действия;
3) тренинг, самоконтроль и коррекция;
4) контроль.

Изученные УУД включаются в практику каждого урока, и у учащихся постепенно и поэтапно вырабатывается весь комплекс метапредметных умений в соответствии с требованиями ФГОС.

В непрерывном курсе математики «Учусь учиться» при формировании каждого УУД часть этого пути учащиеся проходят в 1–4 классах начальной школы, затем последовательно – в курсе математики 5–6 классах, и завершают – в курсе алгебры 7–9 классов.

Федеральный государственный образовательный стандарт основного общего образования устанавливает следующие требования к метапредметным результатам образования.

1. Умение самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учёбе и познавательной деятельности, развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности.

На начальных этапах обучения по курсу математики «Учусь учиться» учитель на этапах 3 («Выявление места и причины затруднения») и 4 («Построение проекта выхода из затруднения») уроков в ТДМ с помощью подводящего диалога помогает учащимся осознать недостаточность имеющихся у них знаний по математике, а затем предлагает им самим поставить цель своей учебной деятельности, корректируя и уточняя их версии пока без обращения к общему способу целеполагания.

В курсе алгебры 7–9 классов организуется мотивация учащихся к освоению умения самостоятельно ставить перед собой учебную цель. Обобщая имеющийся у них опыт, учащиеся под руководством учителя фиксируют содержание понятия цели и алгоритм постановки цели учебной деятельности, а затем на следующих этапах обучения делают это самостоятельно, сопоставляя свои действия с эталоном и, при необходимости, корректируя их. В завершение учащимся предлагается самоконтроль и обучающий контроль умения выполнять данное УУД.

Отметим, что если в 1 – 6 классах учащиеся познакомились с общим способом целеполагания, то в 7 – 9 классах учащиеся тренируют умение ставить цель. В ходе проведения 3 и 4 этапов урока в ТДМ учащимся систематически предлагается выполнять самоконтроль, в завершении учитель организует обучающий контроль умения выполнять данное УУД.

Таким образом, формирование готовности к целеполаганию проходит через все указанные выше необходимые этапы формирования УУД. В результате учащиеся овладевают способностью самостоятельно определять цели своего обучения, ставить и формулировать для себя новые задачи в учебе, развивать мотивы и интересы своей познавательной деятельности.

2. Умение самостоятельно планировать пути достижения целей, осознанно выбирать наиболее эффективные способы решения учебных и познавательных задач.

Технологические требования к 4 этапу урока в ТДМ («Построение проекта выхода из затруднения») состоят в том, что учащиеся в коммуникативной форме обдумывают проект своих будущих учебных действий:

- ✓ ставят цель;
- ✓ согласовывают тему урока;
- ✓ *выбирают способ*;
- ✓ *строят план достижения цели*;
- ✓ определяют средства, ресурсы и сроки.

Благодаря этому, появляется возможность организовать надежное формирование у учащихся указанных УУД посредством проведения их описанным выше путем в 5–9 классах: *опыт – знание способа – применение, самоконтроль и коррекция – контроль*. Важно и то, при этом учащиеся овладевают коммуникативными умениями и способностью оценивать время, средства и ресурсы для своих планов, а на следующем этапе урока – доводить свои планы до исполнения.

3. Умение соотносить свои действия с планируемыми результатами, осуществлять контроль своей деятельности в процессе достижения результата, определять способы действий в рамках предложенных условий и требований, корректировать свои действия в соответствии с изменяющейся ситуацией.

В соответствии с общим подходом, принятым в данном курсе, формирование умения соотносить свои действия с планируемыми результатами и контролировать свою деятельность в процессе достижения результата осуществляется на 7 этапе уроков в ТДМ («Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону»). При проведении данного этапа учащиеся самостоятельно выполняют задания нового типа, осуществляют их самопроверку, пошагово сравнивая с эталоном, выявляют и корректируют возможные ошибки, определяют способы действий, которые вызывают у них затруднения, строят планы по их доработке. Этому же посвящены и уроки рефлексии, но на этих уроках учащиеся не просто выявляют свои проблемы, а уже непосредственно выполняют коррекцию своих действий и вырабатывают соответствующие умения.

Как и при формировании всех универсальных учебных действий в данном курсе учащиеся вначале приобретают первичный опыт выполнения изучаемых УУД, затем знакомятся с нормами их выполнения, сформулированными в виде правил и алгоритмов, и после этого осознанно выполняют эти универсальные действия на каждом уроке по математике курса «Учусь учиться».

Адаптационные механизмы поведения, способность к быстрому реагированию на изменяющиеся условия жизни и деятельности вырабатываются у учащихся посредством реализации в образовательном процессе дидактических принципов вариативности и творчества, освоения ими способов решения проблем творческого и поискового характера.

Творческие способности проявляются в стремлении открыть общую закономерность, лежащую в основе каждого отдельного решения (Д.Б. Богоявленская). Следовательно, системное приобретение опыта построения общего способа математических действий, освоение метода рефлексивной самоорганизации, знакомство с общенаучными методами решения исследовательских проблем (метод перебора, метод проб и ошибок и др.) дает учащимся инструмент эффективного поведения в нестандартной ситуации.

4. Умение оценивать правильность выполнения учебной задачи, собственные возможности ее решения.

На 9 этапе уроков в ТДМ («Рефлексия учебной деятельности на уроке») подобным же образом формируется умение вырабатывать самооценку своей учебной деятельности. На данном этапе фиксируется новое содержание, изученное на уроке, организуется процесс соотнесения целей и результатов, собственной учебной деятельности и изученного алгоритма ее выполнения и делается вывод о ее эффективности /неэффективности.

Оценивать свои возможности решения учебных задач школьники учатся в процессе выбора собственного уровня работы. В учебниках выделены обязательные и необязательные задания, принцип вариативности реализуется, в частности, посредством составления самими учащимися некоторой части классной и домашней работы путем самостоятельного выбора «подходящих» для них по каким-то признакам заданий. Таким образом, они систематически приобретают опыт оценки своих возможностей решения учебных задач.

5. Владение основами самоконтроля, самооценки, принятия решений и осуществления осознанного выбора в учебной и познавательной деятельности.

Формирование основ самоконтроля и самооценки, самостоятельного принятия решений и осознанного выбора своей образовательной траектории формируется в курсе математики «Учусь учиться» в соответствии с принятым общим подходом на 7 этапе уроков в ТДМ («Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону») и на уроках рефлексии.

По мере освоения метода рефлексивной самоорганизации общие алгоритмы УУД, в том числе и действий самоконтроля и самооценки, совершенствуются и уточняются. Так, на первых этапах обучения в начальной школе для самоконтроля и коррекции своих ошибок учащиеся применяют простейший трехшаговый алгоритм.

1. Определяю, какое правило я знаю
2. Повторяю правило
3. Применяю правило

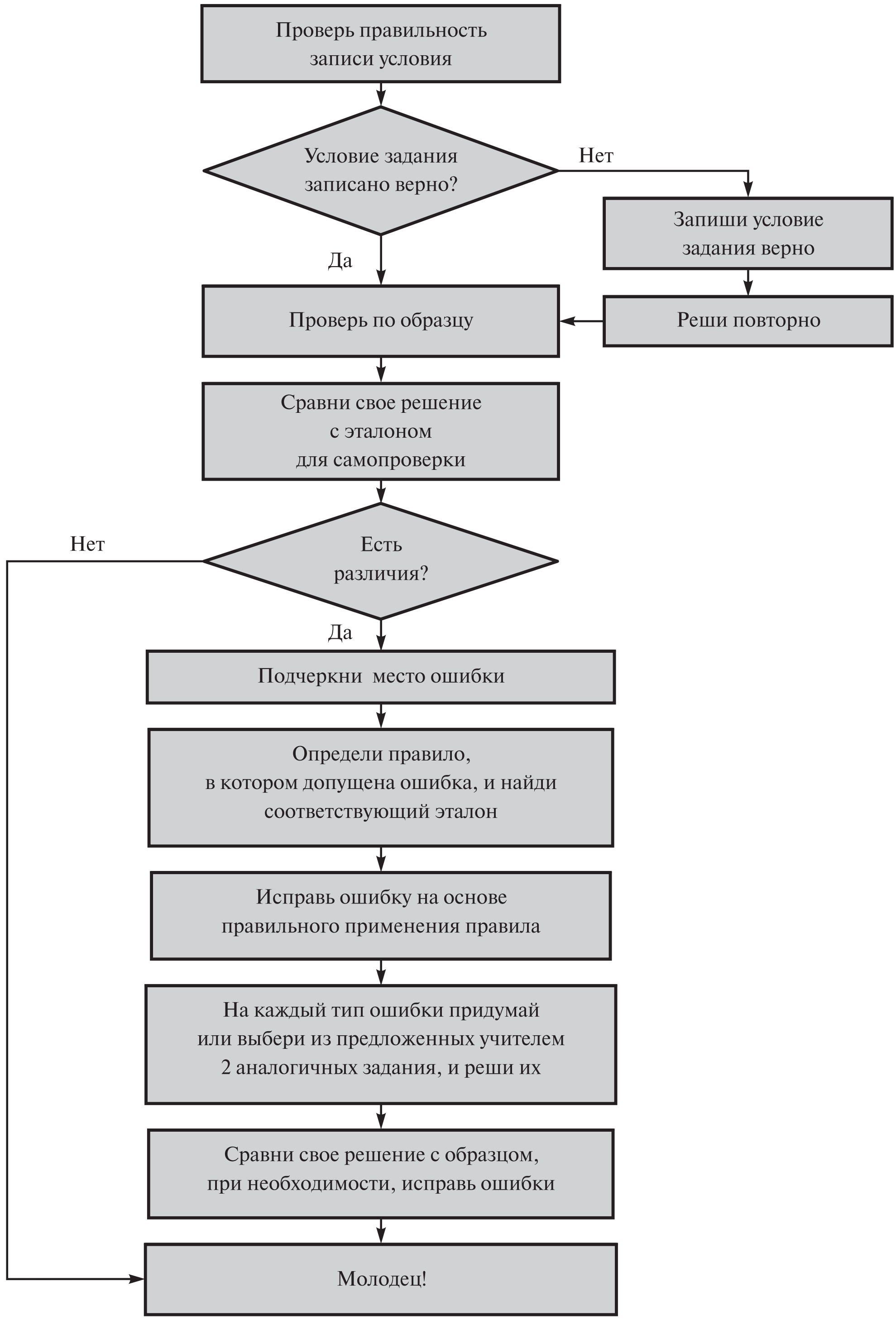
К 4 классу после изучения тем «Алгоритм», «Программа действий» они строят вариант алгоритма, который более подробно описывает последовательность действий при самоконтроле (см. уточненный алгоритм на с. 202).

В 5 классе данный вариант алгоритма еще раз уточняется, и учащиеся овладевают общим способом самоконтроля и коррекции своих действий, который они используют в дальнейшем в 7–9 классах и средней школе.

Кроме того, в методическом аппарате учебников 1–9 классов имеется система самостоятельных и контрольных работ (в учебнике 8 – 9 классов с этой целью разработаны экспресс-тесты), которые позволяют учащимся после изучения каждой темы и каждого раздела курса сделать вывод о достижении / недостижении поставленных целей и задач. Систематическое использование эталонов, то есть согласованных в классе норм математической деятельности, которые учащиеся сами строят в ходе уроков, помогает им правильно определять, что именно они усвоили или не усвоили (то есть причины своего успеха / неуспеха), и на этой основе осуществлять осознанный выбор траектории своего саморазвития в учебной и познавательной деятельностях.

Выработка отношения к ошибке как рабочей ситуации, требующей коррекционных действий, наряду с освоением учащимися эффективных инструментов коррекции собственных ошибок (метод рефлексивной самоорганизации, алгоритм исправления ошибок) формируют у учащихся способность конструктивно действовать даже в ситуации неуспеха.

Блок-схема уточненного алгоритма самоконтроля и исправления ошибок:



Аналогичным образом формируются основы самооценки собственной деятельности на основе 9 этапа уроков в ТДМ («Рефлексия учебной деятельности на уроке»).

6. Умение определять понятия, создавать обобщения, устанавливать аналогии, классифицировать, самостоятельно выбирать основания и критерии для классифи-

кации, устанавливать причинно-следственные связи, строить логическое рассуждение, умозаключение (индуктивное, дедуктивное и по аналогии) и делать выводы.

Логические действия являются основными видами учебных действий при выполнении практически всех заданий курса математики «Учусь учиться». Решая задачи и примеры, уравнения и неравенства, устанавливая и продолжая закономерности, моделируя объекты и процессы, строя диаграммы и графики, преобразовывая фигуры, учащиеся выполняют действия анализа и синтеза, сравнения и обобщения, классификации и аналогии, устанавливают причинно-следственные связи, подводят под понятия, строят логические рассуждения, обосновывают выполняемые ими операции.

Задания учебников, начиная с самого 1 класса, подобраны так, чтобы систематически предоставлять учащимся возможность тренировать весь комплекс логических операций и необходимость устанавливать взаимосвязи, логически обосновывать свои действия. В формулировках заданий часто используются обороты «Проанализируй...», «Сравни...», «Что общего?», «Выполни задание по образцу», «Сделай вывод», «Обоснуй свой ответ», «Разбей на части...» и т.д. Но даже если этих оборотов нет, то все равно решение практически любого задания курса математики требует от учащихся построения цепочек логических рассуждений.

В 1–6 классах в рамках логической линии учащиеся изучают темы «Высказывания», «Виды высказываний», «Определение», «Логическое следование», «Обратное утверждение», «Отрицание высказываний» и др. В 7–9 классах изучаются сложные высказывания с союзами «и» и «или».

На этих уроках учащиеся не просто приобретают опыт выполнения логических действий, а фиксируют эти действия в форме эталонов. Затем изученные логические понятия используются при изучении всех тем курса. Таким образом, создаются условия не только для надёжного усвоения самих этих понятий и формирования умения их грамотного использования, но и для их применения в жизни и практической деятельности, а также для более глубокого и осознанного усвоения собственно математического содержания курса.

7. Умение создавать, применять и преобразовывать знаки и символы, модели и схемы для решения учебных и познавательных задач.

Математический язык представляет собой знаки и символы, описывающие количественные отношения и пространственные формы окружающего мира. Поэтому знаково-символические средства математического языка – цифры и буквы, знаки сравнения и арифметических действий, математические выражения, геометрические фигуры, числовой луч, диаграммы и графики и др. – систематически используются на уроках математики для представления информации, моделирования изучаемых объектов и процессов окружающего мира, решения учебных и практических задач.

Кроме того, в курсе математики «Учусь учиться» широко представлены предметные и графические модели самих математических объектов и операций – натуральных, дробных, положительных и отрицательных чисел, арифметических действий, функциональных зависимостей между величинами, уравнений и неравенств и др. Учащиеся сами строят модели этих объектов, постепенно осознавая суть математического метода исследования реального мира – «умение называть разные вещи одним именем» (А. Пуанкаре).

Начиная с самых первых уроков знакомства с текстовыми задачами, учащиеся систематически работают с их материализованными моделями (схематическими рисунками, схемами, таблицами), наглядно представляющими существенные характеристики исследуемых объектов – количественные и пространственные отношения между ними, взаимосвязи между объектом и его частями и др. Дети учатся читать и строить эти модели, используют их для анализа и поиска решения текстовых задач, интерпретации полученных результатов, выявления общих способов действия во внешне различных ситуациях. Благодаря этому, они не только глубже усваивают учебное содержание по математике, но и овладевают умением использовать знаково-символические средства представления информации для создания моделей изучаемых объектов и процессов.

При этом на доступном для учащихся уровне перед ними раскрываются все три основных этапа математического моделирования:

1) этап *математизации действительности*, то есть построения математической модели некоторого фрагмента действительности;

2) этап *изучения математической модели*, то есть построения математической теории, описывающей свойства построенной модели;

3) этап *приложения полученных результатов* к реальному миру.

Так, при решении текстовой задачи ученик читает и анализирует ее, переводит текст на знаково-символический язык – строит схемы и схематические рисунки, отражающие числовые и пространственные отношения между объектами, процессами, целым объектом и его частями, затем работает с моделью, получает результат и соотносит его с данными в исходном тексте задачи.

Этот путь учащиеся проходят и при построении математических понятий и способов действий. На всех этапах обучения с 1 по 9 класс предметные и графические модели помогают раскрыть перед учащимися недостаточность их знаний и необходимость построения некоторого нового понятия или алгоритма. С другой стороны, модели позволяют организовать процесс его практического построения самими детьми, то есть пройти первый этап математического моделирования.

На втором этапе – этапе изучения построенной математической модели, учащиеся выявляют свойства изучаемых математических объектов и на этапе приложения полученных результатов с их помощью решают актуальные практические задачи (например, строят приемы рациональных вычислений, применяют свои знания для решения текстовых задач и т.д.).

Таким образом, они не просто осваивают знаково-символические средства представления информации для создания моделей изучаемых объектов и процессов, но и приобретают начальные представления об общенаучном методе исследования реального мира – математическом моделировании.

8. Смысловое чтение.

В курсе математики «Учусь учиться» формирование у учащихся навыков смыслового чтения текстов осуществляется при работе с тестовыми задачами, текстами учебника, справочной литературой и Интернет-источниками. В качестве научного инструмента при этом используется метод работы с текстами (МРТ), разработанный в методологической версии теории деятельности (О.С. Анисимов).

На первом этапе учащиеся овладевают навыками понимания текстов задач с опорой на наглядные материальные и материализованные модели (схематические рисунки, схемы, таблицы, числовые и буквенные выражения). При этом используются задачи-ловушки (с неполными данными, лишними данными, нереальными условиями), задачи в косвенной форме, задачи, требующие от детей сопоставления текстов, обобщения, самостоятельной формулировки вопросов, выбора возможных вариантов решения, задачи, имеющие внешне различные сюжеты, но одинаковые математические структуры, построение моделей текстовых задач, составление задач по схемам и выражениям и т.д.

Начиная с 1 класса, проводится системная работа по обучению детей анализу задачи на основе заданного общего алгоритма. Эта работа продолжается в основной школе и к 6 классу позволяет сформировать у большинства детей способность провести самостоятельный анализ любой текстовой задачи.

В 7–9 классе сформированные УУД системно применяются на уроках алгебры, отрабатываются и закрепляются. При этом акцент делается на развитие у учащихся самостоятельности в освоении учебного содержания. Учебные тексты написаны таким образом, чтобы учащий (при желании) был способен самостоятельно осознать смысл нового шага и предложенные способы действий. Это достигается благодаря структуре теоретического материала, отражающей метод рефлексивной самоорганизации. Задачный раздел связан с теоретическим посредством ссылок типа: «Сопоставь свое предположение с правилом на стр. 7», «С помощью какого утверждения на стр. 34 можно обосновать полученный вариант?» и пр.

Такая структура учебника помогает учащимся самостоятельно работать с теоретическим материалом, что важно для последующего обучения в 10–11 классах и дальнейшего профессионального саморазвития каждого ученика.

9. Умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками, работать индивидуально и в группе: находить общее решение и разрешать конфликты на основе согласования позиций и учёта интересов, формулировать, аргументировать и отстаивать своё мнение.

Структура уроков в технологии деятельностного метода (ТДМ) включает в себя этапы, предполагающие получение разных версий ответов как естественный ход событий. Так, на этапе выполнения пробного учебного действия (этап 2) каждый учащийся получает свою версию ответа, и поскольку новый способ действий еще не изучался, то каждый из них сталкивается с затруднением, но у всех оно разное: кто-то вообще не знает, с чего начать и не получил никакого ответа; у других ответы есть, но они оказались неверными; а кто-то получил верный ответ, но не знает, как его обосновать (ведь способ действий еще не изучался).

Поэтому всегда возникают разные версии, мнения, которые учащиеся приучаются внимательно и уважительно выслушивать и обсуждать. Аналогичным образом, гипотезы, которые выдвигают учащиеся на этапе проектирования (этап 4), тоже разные, но при этом каждая из них может помочь найти верный результат.

Таким образом, образовательная среда, которая создается при работе в ТДМ на рассмотренных и других этапах урока, формирует у учащихся готовность воспринимать различные точки зрения, вести диалог, согласовывать позиции с учетом всех высказанных мнений, находить общее решение, формулировать, аргументировать и отстаивать своё мнение.

Необходимость на уроках открытия нового знания совместно решать общую задачу предполагает системное использование в обучении диалоговых форм общения под руководством учителя, парной и групповой форм работы, в ходе которых у учащихся формируется умение организовывать учебное сотрудничество и совместную деятельность с учителем и сверстниками. Данные метапредметные умения формируются на 1–6 и 8–9 этапах уроков в ТДМ, кроме этапа 7 («Самостоятельная работа с самопроверкой по эталону»), где отрабатываются индивидуальные формы работы.

В ходе совместной деятельности учащихся в группах и парах используется распределение ролей на основе общих правил коммуникативного взаимодействия. При этом основным мотивом для согласованных действий и конструктивного разрешения конфликтных ситуаций посредством учета интересов каждого является необходимость получения и представления общего результата: те, кто не сумел договориться и правильно организовать свою работу, – проигрывают.

10. Умение осознанно использовать речевые средства в соответствии с задачей коммуникации для выражения своих мыслей, планирования и регуляции своей деятельности, владение устной и письменной речью, монологической контекстной речью.

Технологической основой эффективного достижения указанного результата в курсе математики «Учусь учиться» является использование правил коммуникативного взаимодействия общей теории деятельности (О.С. Анисимов) и поэтапная теория формирования умственных действий (П.Я. Гальперин).

Учащиеся имеют возможность поэтапно овладевать речевыми средствами для решения коммуникативных и познавательных задач на разных уровнях:

1) выражение в речи своих учебных действий и их результатов по заданному алгоритму;

2) выражение в речи своих учебных действий и их результатов по известному алгоритму в типовых ситуациях;

3) выражение в речи своих учебных действий и их результатов в поисковых ситуациях по заданному общему плану действий;

4) выражение в речи своих учебных действий и их результатов в ситуациях творческого поиска.

Первый вид речевого высказывания осуществляется на 6 этапе урока в ТДМ («Первичное закрепление с проговариванием во внешней речи»), где каждый учащийся выполняет комментирование (фронтально, при работе в парах, в группах) типовых заданий на способ действий, построенный на данном уроке самими учащимися под руководством учителя.

Второй и третий виды речевого высказывания осуществляются на 8 этапе урока открытия нового знания в ТДМ («Включение в систему знаний и повторение») и на уроках рефлексии. Учащиеся систематически используют алгоритмы, построенные на предыдущих уроках, для комментирования решения примеров, уравнений, простых и составных задач в типовых и поисковых ситуациях (когда алгоритмы известны, но не заданы непосредственно).

Четвертый вид речевого высказывания осуществляется на 3–5 этапах урока открытия нового знания в ТДМ («Выявление места и причины затруднения», «Построение и реализация проекта»), а также на уроках рефлексии и внеклассной работе при решении творческих задач и в коллективной и индивидуальной проектной работе, где предполагается также активное использование средств ИКТ. Здесь же предусмотрена подготовка и проведение учащимися презентаций своих творческих работ, что способствует развитию не только речевых средств, но и познавательных и коммуникативных УУД.

11. Формирование и развитие ИКТ–компетенций.

При работе по курсу математики «Учусь учиться» на всех возрастных этапах с 1 по 9 класс учащиеся овладевают широким спектром первичных навыков работы с информацией: они учатся анализировать, сравнивать и обобщать информацию, осуществлять ее синтез и классификацию, вести запись, осуществлять поиск необходимой информации, выделять и фиксировать информацию, систематизировать ее, интерпретировать, преобразовывать, передавать и хранить, представлять информацию и создавать новую в соответствии с поставленной учебной целью.

Формирование умений осуществлять поиск необходимой информации и работать с ней реализуется в учебниках данного курса по нескольким направлениям:

- целенаправленный поиск конкретной информации (знаний, способов действий) для решения учебных задач, презентаций своих творческих работ и т.д.;
- отсылки по текстам учебников, например, к предыдущим текстам и заданиям, справочным материалам, энциклопедиям и т.д.;
- поиск информации в различных источниках (в книгах, журналах, справочниках и энциклопедиях, в сети Интернет, в беседах со взрослыми и др.) для выполнения проектных работ и последующая работа с ней: анализ и систематизация собранной информации, представление полученной информации в нужном виде (в виде текстов для школьной газеты или буклета, набранных с помощью клавиатуры компьютера, в виде рисунков, таблиц, презентаций, диаграмм и т.д.).

Уже в начальной школе учащиеся работают с таблицами, схемами, множествами, строят диаграммы Эйлера–Венна, находят подмножества, объединение и пересечение множеств, выполняют их классификацию по заданным свойствам, строят круговые и столбчатые диаграммы, графики движения. Эта работа системно продолжается в основной школе с использованием координат на плоскости, формул и графиков функций, что дает новые возможности для представления и интерпретации полученных данных.

На всех уроках математики школьники овладевают навыком фиксирования информации средствами математического языка – выражений и формул, графиков и схем. Они самостоятельно строят алгоритмы новых способов действий (линейные, разветвленные, циклические) и фиксируют их с помощью блок-схем.

Работая с текстовыми задачами, они учатся выделять существенную информацию и представлять ее в форме схематических рисунков, графических схем, таблиц. Затем они анализируют полученную таким образом информацию и на этой основе решают поставленные познавательные задачи.

Разработанная в данном курсе система эталонов позволяет сформировать у учащихся навык целенаправленного поиска в известном источнике нормативно заданной информации, нужной для решения задач и обоснования правильности своих действий. Этому же служат приведенные в учебнике правила, формулы, образцы решения задач и примеров.

При подготовке проектов во внеурочной индивидуальной и групповой работе учащиеся осуществляют поиск информации в ситуации, когда источник информации не известен. При этом они используют справочную литературу и Интернет-ресурсы, подготовку презентаций с использованием современных технологических средств (фотографирование, сканирование, презентации и т.д.).

12. Формирование и развитие экологического мышления, умение применять его в познавательной, коммуникативной, социальной практике.

В процессе изучения курса математики «Учусь учиться» для 1—9 классов в соответствии с принципом целостного представления о мире, входящего в дидактическую систему деятельностного метода обучения, у учащихся формируется современная научная картина мира. Изучаемые математические понятия рассматриваются в их собственном закономерном развитии, в многообразии отношений с другими объектами, понятиями, явлениями и процессами, что формирует представление о математике как общей понятийной базе различных областей знания.

Таким образом, математическое знание позволяет раскрыть глубинную связь между явлениями, внешне никак не связанными друг с другом. С другой стороны, деятельностный метод обучения помогает сформировать у учащихся личностное отношение к изучаемым знаниям, неравнодушное, ответственное отношение к результатам своей деятельности.

Благодаря этому, средствами математического образования удается внести существенный вклад в формирование базового компонента экологического мышления и экологического воспитания – осознания глубинной взаимосвязи природы, общества, человека, их влияния и зависимости друг от друга, а также воспитания у учащихся чувства ответственности за свои поступки.

Отметим, что многие личностные и метапредметные результаты формируются в **курсе алгебры опосредованно: при выполнении многих заданий на расшифровку** предлагаются высказывания и слова, которые могут послужить поводом для дискуссии на тему отношений между людьми, патриотизма, моральных проблем, отношения к учебе.

Так, например, в 8 классе при нахождении наибольшего и наименьшего значения квадратного трехчлена учащиеся выстраивают соответствующие им буквы по возрастанию (убыванию) и получают понятия: «искренность» и «бескорыстие». Им предлагается ответить на вопрос, связаны ли эти понятия с понятием «дружба».

В 9 классе для уточнения представления о приближенных вычислениях используется содержание, отражающее экологические проблемы нашей планеты: «Прочитайте следующие предложения:

а) В течение XX века численность населения мира выросла от 1,65 до 6 миллиардов.

б) Несмотря на огромную роль лесов, каждую минуту на нашей планете вырубается от 14 до 20 га леса.

в) С начала XVII по конец XX в. с лица Земли исчезло 68 видов млекопитающих, 130 видов птиц, 28 видов рептилий, 6 видов рыбы и 6 видов амфибий.

Можно ли считать указанные числа точными значениями данных величин. Поясните свой ответ. Как называют такие данные?»

Подобная работа проводится в курсе «Учусь учиться» систематически.

Оглавление

Введение ... 3
Содержательные особенности построения курса «Учусь учиться» 7–9 классов ... 4
Методические особенности построения курса «Учусь учиться» 7–9 классов ... 5
Содержательно-методические линии курса «Учусь учиться» 7–9 классов ... 8
Тематическое планирование ... 15
Общие рекомендации для учителя ... 19
Система обучающего контроля ... 20
Домашнее задание ... 20

Методические рекомендации к организации учебного процесса ... 21

Глава 1. Развитие математической теории ... 21
§ 1. Теория множеств ... 24
§ 2. Элементы комбинаторики и теории вероятностей ... 35
§ 3.* Метод математической индукции ... 42

Глава 2. Развитие понятия функции ... 47
§ 1. Свойства функции ... 49
§ 2. Исследование функций и построение графиков ... 62

Глава 3. Числовые последовательности ... 80
§ 1. Последовательности и их общие свойства ... 82
§ 2. Арифметическая прогрессия ... 86
§ 3. Геометрическая прогрессия ... 94

Глава 4. Решение уравнений и неравенств высших степеней ... 104
§ 1. Развитие понятия корня ... 107
§ 2. Решение простейших иррациональных уравнений и неравенств ... 119
§ 3. Расширение понятия степени ... 123
§ 4. Решение уравнений и неравенств высших степеней ... 130
§ 5. Системы нелинейных уравнений ... 143
§ 6. Приближенное решение уравнений ... 154

Глава 5.* Тригонометрические функции числового аргумента ... 158
§ 1. Тригонометрические функции. Основные свойства ... 160
§ 2. Основные формулы тригонометрии. Тригонометрические преобразования ... 163

Приложение ... 168
Технология деятельностного метода ... 168
Достижение результатов освоения основной образовательной программы ФГОС ... 193